

گزیده ای از مسابانی ریاضی

بہمن ۹۸

محمد علی تقی پور

فصل اول

مبانی منطق و حساب گزاره ها

۱. گزاره‌ها

تعریف ۱.۱ (گزاره). یک جمله خبری که درست یا نادرست باشد (و نه هر دو) را یک گزاره گوئیم. البته لزومی ندارد که ما درستی یا نادرستی جمله ای را بدانیم تا بگوئیم گزاره است یا خیر. همین که بدانیم در هر زمان و مکان تنها یکی از این دو ارزش را دارد برای گزاره بودنش کافی است. مثلاً این جملات گزاره هستند:

- این درس را با نمره‌ی بالای ۱۰ می گذرانید. (گزاره البته نه لزوماً درست!)
 - عدد ۲ زوج است و اول. (گزاره درست)
 - عدد ۲ فرد است. (گزاره نادرست)
 - عدد پی نسبت محیط دایره به قطر آن است. (گزاره درست)
 - عدد پی برابر ۳/۱۴ است. (گزاره نادرست)
 - هر عدد زوج بزرگتر از ۲ جمع دو عدد اول می باشد. (این جمله که به حدس گلدباخ معروف است جمله ای است خبری که درستی یا نادرستی آن تا کنون اثبات نشده اما بالاخره یا درست است یا نا درست و نه هر دو!)
 - هر عدد اول فرد است. (گزاره نادرست)
 - بعضی از اعداد اول فرد هستند. (گزاره درست)
 - همه مریخی ها قرمه سبزی دوست دارند! (گزاره)
 - $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (گزاره درست)
- اما جملات زیر گزاره نیستند:

- آیا ۲ عددی اول است؟ (جمله خبری نیست.)
- هوا خوب است. (جمله خبری است اما چون معنای کلمه‌ی "خوب" مشخص نیست، در زمان ها و مکان ها و برای افراد مختلف، این جمله می تواند هم درست و هم نادرست باشد.)
- او درس می خواند. (گزاره نیست چون منظور از "او" مشخص نیست.)
- این جمله که در حال خواندن آن هستید یک جمله دروغ است! (گزاره نیست چون نمی تواند درست یا نادرست باشد!)

تعریف ۲.۱ (عالم سخن). مجموعه ای که گزاره های مورد بحث ما در مورد عناصر آن بیان می شوند را *عالم سخن* یا *مجموعه جهانی* یا *مرجع می* نامیم. به عنوان مثال *عالم سخن* در گزاره‌های بالا بصورت زیر قابل تفسیر است:

- " شما این درس را با نمره‌ی بالای ۱۰ می گذرانید" گزاره‌ای درمورد دانشجویان یا نمرات آنهاست.

- گزاره‌ی " هر عدد اول فرد است" در مورد مجموعه‌ی اعداد صحیح یا مجموعه‌ی اعداد اول می‌باشد.

- گزاره " عدد پی نسبت محیط دایره به قطر آن است" در مورد عدد π یا در مورد همه‌ی دایره‌ها قابل تفسیر است.

دقت کنید که عالم سخن در درستی یا نادرستی یک گزاره می‌تواند اثر بگذارد. مثلاً گزاره‌ی " عددی وجود دارد که در معادله‌ی $2x - 1 = 0$ صدق کند" در مجموعه‌ی اعداد صحیح نادرست و در مجموعه‌ی اعداد گویا گزاره‌ای درست می‌باشد.

تعریف ۳.۱ (گزاره نما و اسم نما). جمله‌ای خبری (عبارتی) که در برگیرنده یک یا چند متغیر یا مجهول از عالم سخن باشد و با تعیین این متغیرها یا مجهولات به یک گزاره (اسم خاص) تبدیل شود را یک گزاره نما (اسم نما) می‌گوئیم. به عنوان نمونه جملات زیر گزاره نما هستند:

- او درس می خواند. ("او" مجهول این جمله است.)

- x عددی اول و فرد است.

- عدد اول x (اسم نما)

- او (اسم نما)

- کتاب ... (اسم نما)

گزاره‌ها را معمولاً با حروف کوچک انگلیسی مانند p, q, r و ... نمایش می‌دهیم و به طور مشابه گزاره‌نماها با متغیری مانند x را با $p(x), q(x), r(x)$ و ... نمایش می‌دهیم.

۲. سورها

همانگونه که گفته شد می‌توان با تعیین متغیرها گزاره‌نماها را به گزاره تبدیل کرد. یک راه دیگر برای این کار بیان گزاره نما بصورت یک گزاره عمومی (کلی) و یا یک گزاره وجودی (جزئی) در عالم سخن می‌باشد. به عنوان مثال گزاره نمای " x عددی اول است" را در نظر بگیرید. اگر آن را به صورت کلی "برای هر عدد طبیعی x ، x عددی اول است" یا به صورت جزئی "عدد طبیعی x وجود دارد که، x عددی اول است" تبدیل کنیم، هر دو جمله‌ی بدست آمده گزاره خواهند بود و می‌توان آنها را بدون متغیر ظاهری x هم، به صورت زیر بیان کرد:

"همه اعداد طبیعی اول هستند" و "عدد طبیعی اولی وجود دارد"

(که اولی گزاره‌ای نادرست و دومی گزاره‌ای درست است).

دقت کنید که متغیر x در گزاره نمای اصلی جایگاهی آزاد برای عناصر عالم سخن بود و معنی و ارزش گزاره نما به آن وابسته بود، اما در عبارات بعدی تبدیل به یک متغیر ظاهری شد و در حیطه یا محدوده‌ای معین از عالم سخن قرار گرفت (تمام یا بخشی از عالم سخن) که می‌توانست حتی در عبارت ظاهر نگردد (مانند صورت های دوم گزاره‌های نوشته شده در بالا!) در این حالت می‌گوئیم که این متغیر به همه یا بعضی از عناصر عالم سخن پایبند یا مقید است و دو عبارت "برای هر" و "وجود دارد" به ترتیب سور عمومی و سور وجودی نامیده می‌شوند. برای خلاصه نویسی سور عمومی را با $\forall$ و سور

وجودی را با $\exists$ نمایش می دهیم. البته توجه داریم که همان طور که در مثال بالا دیدیم، هر سور محدوده‌ای را برای یک متغیر ظاهری مانند x مشخص می کند و لذا به همراه هر سور همیشه یک متغیر می آید (مثلاً $\forall x$ و $\exists x$) بلافاصله بعد از آن گزاره‌نمایی که معمولاً در برگیرنده آن متغیر (و شاید متغیرهای آزاد دیگر) باشد قرار می گیرد (مثلاً $\forall x p(x)$ و $\exists x p(x)$). گاهی صرفاً برای تأکید یا جلوگیری از ابهام، عالم سخن، که متغیر مورد نظر از آن اختیار می شود، را جلوی متغیر سور می نویسیم. همچنین برای سور عمومی از عباراتی مانند "برای همه x ها یا به ازای هر x دلخواه" یا بصورت منفی "برای هیچ مقدار x " و برای سور وجودی از عباراتی مثل "برای برخی از مقادیر x یا برای دست کم یک مقدار x " و نظایر آن ها استفاده می کنیم. به مثال های زیر در این مورد دقت کنید.

- برای همه مقادیر حقیقی x ، مقدار $\sin x$ برابر صفر است (مقدار تابع سینوس در هر نقطه حقیقی برابر صفر است).

$$\forall x \sin x = 0 \quad \text{یا} \quad \forall x \in \mathbb{R} \sin x = 0$$

- برای دست کم یک مقدار حقیقی x ، مقدار $\sin x$ برابر صفر است (مقدار تابع سینوس در دست کم یک نقطه حقیقی برابر صفر است).

$$\exists x \sin x = 0 \quad \text{یا} \quad \exists x \in \mathbb{R} \sin x = 0$$

۳. ترکیب گزاره‌ها

گزاره‌ها می‌توانند جملاتی ساده و بدون حروف ربط زبان مورد استفاده باشند و یا از ترکیب گزاره‌های ساده با کمک حروف ربط یا عملگرهای مشخص به دست آیند. در این صورت گزاره بدست آمده یک گزاره‌ی مرکب نامیده می‌شود. رابط‌هایی که گزاره‌های مرکب به کمک آن‌ها حاصل می‌شوند در همه‌ی زبان‌ها تقریباً یکسان هستند (حداقل در منطق کلاسیک مورد توافق عقل بشر تنها از این روابط برای ترکیب گزاره‌ها استفاده می‌شود). برای گزاره‌های دل خواه p و q این رابط‌ها یا عملگرها عبارتند از:

- **نقیض گزاره:** با نماد $\sim p$ یا $\neg p$ نمایش داده می شود و به معنی نفی گزاره p می باشد، و می‌خوانیم چنین نیست که p . نقیض یک گزاره خود گزاره‌ایست که معنای گزاره‌ی اصلی را منفی می‌کند. بنابراین نقیض یک گزاره تنها و تنها زمانی ارزش درست دارد که خود گزاره نادرست باشد. نقیض یک گزاره می‌تواند صورت منفی شده آن جمله (با فعل منفی شده یا با افزودن پیشوندهای منفی‌ساز) باشد. اگرچه با این روش می‌توان نقیض یک گزاره را نوشت اما درحالت کلی این جمله منفی شده تنها نمایش برای نقیض این گزاره نخواهد بود. بلکه همانطور که در تعریف نقیض گفته شد، معنا یا ارزش گزاره‌ی نقیض باید متضاد معنا یا ارزش خود گزاره باشد. به عنوان مثال نقیض گزاره‌ی درست "عدد ۳ فرد است"، می‌تواند هر یک از گزاره‌های نادرست زیر باشد:

- چنین نیست که عدد ۳ فرد است.

- عدد ۳ فرد نیست.

- عدد ۳ زوج است.

- عدد ۲ فرد است.

- $5=2+2$

با این وجود بیشتر دوست داریم که گزاره‌ای را به عنوان نقیض یک گزاره به کار گیریم که ارتباط معنایی و ظاهری با خود گزاره‌ی اصلی در آن مشهود باشد. مثلاً دو گزاره‌ی آخر مثال بالا را کمتر به عنوان نقیض گزاره‌ی اصلی مطرح می‌کنیم، چون در معنای آن‌ها مشابهتی با گزاره‌ی اصلی دیده نمی‌شود.

مورد دیگری که بکارگیری فرم ظاهری گزاره (یعنی ظاهر و فعل جمله به جای معنای کلمات) را در ساختن گزاره‌های نقیض موجه‌تر می‌سازد، ایجاد اشتباه در یافتن مفهوم ضد مفهوم گزاره‌ی اصلی است. مثلاً نقیض گزاره "عدد صحیح یک عددی مثبت است" گزاره‌ی "عدد صحیح یک عددی منفی است" نمی‌باشد! در واقع در مجموعه‌ی مرجع اعداد صحیح نقیض کلمه "مثبت" کلمه "منفی" نیست، بلکه نقیض آن کلمه "نامثبت" به معنی "منفی یا صفر" است. بنابراین گاهی منفی کردن معنای کلمات می‌تواند ما را دچار اشتباه کند و نیازمند دقت بسیار در معانی و محدوده‌ی عالم سخن است.

این نحوه‌ی برخورد با گزاره‌ها، یعنی در نظر گرفتن صورت آن‌ها به جای معنایشان، وجه صوری منطق ریاضی را آشکار می‌کند و به همین دلیل به منطق ریاضی گاهی منطق صوری نیز گفته می‌شود. در هر صورت آن‌چه در ریاضی‌نویسی اهمیت دارد، درستی و وضوح نگارش است و نه زیبایی ظاهری نوشتار و معانی کلمات و عبارات؛ هرچند این نحوه‌ی نگارش باعث طولانی شدن عبارات یا نازیبا و نامأنوس بودن آن‌ها باشد.

- **رابط عطف و ترکیب عطفی:** رابط عطف یا عاطف با $\wedge$ و ترکیب عطفی دو گزاره با نماد $p \wedge q$ نمایش داده می‌شوند و می‌خوانیم p و q ، و آن گزاره‌ایست که تنها و تنها زمانی درست است که هر دو گزاره p و q ارزش درست داشته باشند. گاهی کلماتی مانند "ولی" و "اما" از نظر منطقی به معنی رابط عطف به کار می‌روند. مثلاً گزاره "۹ عددی فرد است ولی اول نیست" به معنی "۹ عددی فرد است و ۹ عددی اول نیست" می‌باشد.

- **رابط فصل و ترکیب فصلی:** رابط فصل یا فاصل با $\vee$ و ترکیب عطفی دو گزاره با نماد $p \vee q$ نمایش داده می‌شوند و می‌خوانیم p یا q ، و گزاره‌ایست که تنها و تنها زمانی **نادرست** است که هر دو گزاره p و q ارزش **نادرست** داشته باشند (پس زمانی درست است که دست کم یکی از دو گزاره‌ی ترکیبی درست باشد). توجه کنید که برقراری $p \vee q$ به معنی برقراری گزاره p یا گزاره q یا هر دو این گزاره‌ها می‌باشد و لذا گاهی با کاربرد "یا" در زبان محاوره‌ای تفاوت می‌کند. معمولاً در محاوره منظور " p یا q " تنها یکی از این دو گزاره است و نه هر دو که به این کاربرد از فاصل "**یا** مانع جمع" گفته می‌شود (یعنی مانع از درست بودن هر دو گزاره با هم است). مثلاً وقتی می‌گوییم "نمره قبولی می‌گیری یا نمره رد می‌گیری" می‌دانیم که ممکن نیست که هر دو گزاره با هم اتفاق بیفتند. پس در این جا "یا" مانع جمع است. برای تشخیص این نوع از "یا" معمولاً از عبارت " p یا q " با نماد $p \vee q$ یا $p \triangle q$ استفاده می‌کنیم. این نوع گزاره ترکیبی با یای مانع جمع تنها زمانی گزاره‌ای درست است که دقیقاً یکی از دو گزاره درست باشند.

گاهی کلماتی مانند "والا" و "وگرنه" از نظر منطقی به معنی رابط فصل به کار می‌روند. مثلاً گزاره "۹ عددی فرد است وگرنه زوج می‌باشد" به معنی "۹ عددی فرد است یا ۹ عددی زوج است" می‌باشد.

- **رابط شرط و ترکیب شرطی:** رابط شرط با $\rightarrow$ و ترکیب شرطی دو گزاره با نماد $p \rightarrow q$ نمایش داده می‌شوند و می‌خوانیم "اگر p آنگاه q ". در این حالت p را فرض یا مقدم گزاره شرطی و q را حکم یا تالی یا نتیجه آن می‌نامیم. گزاره شرطی $p \rightarrow q$ تنها و تنها زمانی **نادرست** است که فرض p ، گزاره‌ای درست باشد اما نتیجه q ، ارزش نادرست داشته باشد (پس زمانی درست است که یا هر دو گزاره فرض و حکم درست باشند یا فرض نادرست باشد).

گزاره شرطی، *استلزام* نیز گفته می‌شود و گاهی عباراتی مانند زیر به جای "اگر p آنگاه q " به کار برده می‌شوند:

"اگر p, q " یا "هرگاه p آنگاه q " یا "در حالتی که p, q " یا " p و تنها زمانی که q " یا " p شرط کافی برای (مستلزم) q است" یا " q اگر (به شرطی که) p " یا " q شرط لازم برای p است".

اگر گزاره شرطی $p \rightarrow q$ همواره درست باشد آن را یک نتیجه یا قضیه می‌نامیم و با نماد $p \Rightarrow q$ نمایش می‌دهیم. شاید این دو نماد را قبلاً به اشتباه به جای هم به کار برده باشید! پس از این به بعد در به کار بردن آن دقت کنیم ($p \Rightarrow q$) برای هنگامی که مطمئن هستیم نتیجه گیری درست است و $p \rightarrow q$ برای زمانی که صرف استلزام مد نظر ما باشد، بدون در نظر داشتن درستی یا نادرستی آن).

اگر p و q دو گزاره باشند، ارزش دو گزاره‌ی شرطی $p \rightarrow q$ و $q \rightarrow p$ ممکن است یکسان نباشد (یعنی ممکن است یکی درست و دیگری نادرست باشد). گزاره $q \rightarrow p$ را عکس یا وارون گزاره‌ی شرطی $p \rightarrow q$ می‌نامیم که از جابه‌جا کردن فرض و حکم آن بدست آمده است. ترکیب عطفی یک گزاره‌ی شرطی مانند $p \rightarrow q$ و عکس آن، یعنی $p \rightarrow q$ ، را یک گزاره‌ی دو شرطی یا استلزام دو طرفه می‌نامیم و با نماد $p \leftrightarrow q$ نمایش می‌دهیم و می‌خوانیم " p اگر و تنها اگر q ". گزاره‌ی دوشروطی تنها و تنها زمانی درست است که هر دو گزاره‌ی p و q دارای ارزش یکسانی باشند (یعنی هر دو درست یا هر دو نادرست باشند). در این حالت گاهی می‌گوئیم:

" p شرط لازم و کافی برای q است" یا "اگر p آنگاه q و برعکس" یا " p تنها و تنها زمانی که q " یا " p و q معادل (هم ارز) هستند".

گزاره‌ی دوشروطی همواره درست را هم/ارزی یا اتحاد می‌نامیم و با $p \leftrightarrow q$ یا $p \equiv q$ نمایش می‌دهیم. در این حالت p و q را معادل یا هم/ارز گوئیم. بنابه تعریف هر دو گزاره هم ارز همواره ارزش یکسانی دارند و لذا از هر یک می‌توان به جای دیگری استفاده کرد.

۴. جداول تعیین ارزش

برای تعیین ارزش یک گزاره (یعنی درست یا نادرست بودن آن) باید تمام حالات ممکن برای ارزش گزاره‌های سازنده آن را در نظر گرفت و به کمک آن چه در بالا در مورد ارزش گزاره‌های حاصل از رابط‌های مختلف گفته شد، ارزش گزاره‌ی مورد نظر را در هر حالت جداگانه تعیین کرد. برای جلوگیری از جا ماندن برخی حالات می‌توان این کار را در جدولی بصورت مرتب انجام داد و همه ارزش‌های گزاره‌های ساده‌تر را نسبت به یک‌دیگر در سطرها جدول مرتب کرد. چنین جدولی، یک جدول تعیین ارزش نامیده می‌شود. در هر ستون از چنین جدولی ارزش‌های ممکن برای یک گزاره با توجه به ارزش گزاره‌های ستون‌های دیگر نوشته می‌شود. معمولاً ارزش درست (true) را با حرف انگلیسی «T» یا حرف فارسی «د» یا رقم 1 و ارزش نادرست (false) را با حرف انگلیسی «F» یا حرف فارسی «ن» یا رقم 0 نمایش می‌دهیم. اگر تعداد n گزاره‌ی ساده در گزاره اصلی داشته باشیم، چون هر کدام دو ارزش می‌توانند داشته باشند (یا درست یا نادرست)، همه‌ی این گزاره‌ها دارای 2^n حالت برای ارزش‌گذاری هستند و لذا جدول تعیین ارزش چنین گزاره‌ای دارای 2^n سطر می‌باشد. با توجه به مطالب گفته شده در مورد ارزش رابط‌های منطقی جدول تعیین ارزش گزاره‌های اصلی ترکیبی به صورت زیر است:

p	$\sim p$
F	T
T	F

p	q	$p \vee q$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

p	q	$p \wedge q$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

p	q	$p \rightarrow q$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

۵. قواعد پرانتزگذاری و اولویت عملیات

هر عبارت شامل گزاره‌ها، متغیرها، علائم رابط‌های منطقی، پرانتزها و سورها یک فرمول نامیده می‌شود و اگر با معنی بوده و از قواعد منطق پیروی کند به آن یک فرمول خوش‌ساخت می‌گوئیم. اگر فرمولی پرانتز نداشته باشد برای ترتیب اعمال رابط‌ها ممکن است ابهام پیش آید. به همین سبب با توجه به تعاریف رابط‌ها اولویت‌هایی برای انجام آن‌ها به ترتیب زیر قرارداد می‌کنیم:

- (۱) پرانتزهای بیرونی‌تر
- (۲) سورهای عمومی و وجودی و نقیض
- (۳) رابط عطفی و رابط فصلی
- (۴) رابط شرط
- (۵) در شرایط مساوی به ترتیب از سمت چپ شروع به اعمال رابط‌ها می‌کنیم.

۶. اعمال رابط‌ها و قواعد سورها

برای انجام رابط‌ها قواعدی از تعریف آن‌ها می‌توان نتیجه گرفت که تعیین ارزش گزاره‌ها و کار با آن‌ها برای انجام استنتاج-های منطقی را ساده‌تر می‌سازند. تعدادی از این قواعد در تمرین‌های شماره ۳۸ تا ۴۵ و ۵۱ تا ۶۱ بیان شده‌اند که در اینجا مهمترین‌ها را بررسی می‌کنیم.

- برای نقیض کردن گزاره‌های عطفی و فصلی دو قاعده مهم و کاربردی وجود دارد که موسوم به قواعد دمرگان هستند:

$$\sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

این دو قاعده کاربرد زیادی در ساده‌سازی گزاره‌های پیچیده‌تر و نتیجه‌گیری‌ها دارند و به کمک آن‌ها می‌توان گزاره‌های معادل و نیز قوانین جدیدی برای رابط‌ها تعریف کرد.

- می‌توان دید که هر گزاره‌ی شرطی را می‌توان به یک گزاره‌ی فصلی تبدیل کرد که در بسیاری از موارد برای ساده‌تر کردن یا رفع ابهام گزاره‌ها کارگشا خواهد بود. در واقع داریم،

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

البته ما کمتر در محاوره از این تبدیل استفاده می‌کنیم. مثلاً اینکه بگوئیم "اگر درس نخوانید، موفق نمی‌شوید" معادل است با اینکه بگوئیم، "درس بخوانید یا موفق نشوید!". شاید این نوع استفاده کمتر رایج باشد اما گاهی مسائل را بسیار ساده می‌کنند. مثلاً فرض کنید بخواهیم این گزاره را نقیض کنیم. آیا می‌توانید نقیض گزاره‌ی شرطی فوق را بیان کنید؟! (کمی سعی کنید!) اگر از فرم شرطی برای این کار استفاده کنیم عبارت نقیض دور از ذهن خواهد بود، زیرا نقیض یک گزاره‌ی شرطی به صورت یک گزاره‌ی شرطی نیست. اما به کمک قوانین دمرگان که در بالا گفته شد و فرم فصلی این گزاره، نقیض آن به سرعت مشخص می‌شود: "درس نخوانید و موفق شوید!"

- قاعده مهم و کاربردی دیگری نیز وجود دارد که معادل گزاره‌ی شرطی است که به آن قاعده‌ی عکس نقیض می‌گوئیم؛ همواره برای گزاره‌های p و q داریم،

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$$

یعنی به جای تعیین ارزش یا به‌کار بردن یک گزاره‌ی شرطی می‌توان جای فرض و حکم را عوض کرده و هر یک را نقیض کنیم. این قاعده برای ساده‌سازی استنتاج‌ها نیز بسیار به‌کار می‌رود و یکی از روش‌های اثبات به‌شمار می‌رود که در قسمت بعد مثال‌ها و مطالبی درمورد آن خواهیم دید.

همچنین گزاره‌هایی مانند "موفق نمی‌شوید مگر اینکه درس بخوانید!" نیز گزاره‌هایی شرطی هستند. در واقع این گزاره یک گزاره‌ی شرطی به‌صورت زیر است:

"اگر درس نخوانید، آنگاه موفق نمی‌شوید!"

در حالت کلی " p مگر q " هم معنی "اگر q ، آنگاه p " می‌باشد.

- سورهای عمومی و وجودی نیز قواعدی ویژه دارند که مهم‌ترین آن‌ها نقیض کردنشان است. پیش از بیان این قاعده دقت کنید که سور عمومی در واقع تعمیمی از گزاره‌ی عطفی و سور وجودی تعمیمی از گزاره‌ی فصلی است. در واقع وقتی می‌گوئیم $\forall x p(x)$ ارزش درست دارد، منظور این است که برای تک‌تک عناصر عالم سخن $p(x)$ برقرار باشد. مثلاً اگر عالم سخن مجموعه $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ باشد، $\forall x p(x)$ هم ارز گزاره $p(x_1) \wedge p(x_2) \wedge \dots \wedge p(x_n)$ خواهد بود، زیرا برای برقراری سور عمومی باید همه $p(x_i)$ ‌ها با هم درست باشند که این در ترکیب عطفی این گزاره‌ها اتفاق می‌افتد. بطور مشابه سور وجودی $\exists x p(x)$ زمانی درست است که دست‌کم برای یکی از عناصر عالم سخن $p(x)$ درست باشد، که این در ترکیب فصلی گزاره‌ها اتفاق می‌افتد. بنابراین قواعد سور عمومی شبیه قواعد ترکیب عطفی و قواعد سور وجودی شبیه قواعد ترکیب فصلی خواهند بود. بویژه بنا به تعمیم قاعده‌ی دمرگان:

$$\sim (\forall x P(x)) \equiv \exists x \sim P(x)$$

$$\sim (\exists x P(x)) \equiv \forall x \sim P(x)$$

پس نقیض سور عمومی برای یک گزاره، سور وجودی از نقیض آن گزاره خواهد بود و بالعکس (دقت کنید که اولین گزاره پس از سور، گزاره برای سور خواهد بود، پس در صورت ایجاد ابهام با توجه به قواعد پرانتزگذاری، حتماً پرانتز می‌گذاریم). به عنوان نمونه:

نقیض گزاره‌ی "هر عدد صحیحی اول است" می‌شود: "یک عدد صحیح وجود دارد که اول نیست".

همچنین نقیض "یک عدد اول زوج وجود دارد" می‌شود: "همه‌ی اعداد اول زوج نیستند (فرد هستند)" یا به فرم "هیچ عدد اولی زوج نیست".

- برای بیان گزاره‌های با سور عمومی معمولاً گزاره‌های شرطی به کار می‌روند، یعنی پس از سورهای عمومی در بیشتر موارد گزاره‌ای ساده یا شرطی خواهیم داشت، به عنوان مثال، گزاره "هر عدد صحیح اول بزرگتر از ۲ فرد است" در واقع به صورت گزاره‌ی شرطی مَسُور زیر است:

"هر عددی صحیح، اگر اول و بزرگتر از ۲ باشد، آن‌گاه عددی فرد است."

البته کاربرد سور عمومی در محاوره گاهی متفاوت است و ممکن است ایجاد ابهام نماید. مثلاً، وقتی ضرب‌المثل عامیانه - "هر گردی که گردو نیست!" را به کار می‌بریم، منظورمان این نیست که "تمام چیزهای گرد، گردو نیستند!" یا "اگر چیزی گرد بود، آن‌گاه گردو نیست!"، یعنی کلمه "هر" نشانه سور عمومی نیست! بلکه منظور ما از بیان این عبارت این جمله است "چنین نیست که همه‌ی گردی‌ها گردو باشند!"، یعنی نقیض گزاره‌ی کلی "هر گردی گردو است"، و به این معنا می‌باشد که "یک چیز گرد وجود دارد (پیدا شده!) که گردو نیست!".

همچنین سور وجودی معمولاً به همراه گزاره‌های عطفی می‌آید. مثلاً "عدد صحیح اول زوج وجود دارد" که درواقع گزاره‌ی سوردار زیر است:

"عدد صحیحی وجود دارد که اول است و زوج می‌باشد."

یک اشتباه رایج در منطق سنتی (قدیمی) است این است که برای سور وجودی، همانند آن‌چه برای سور عمومی گفتیم، بیانی به صورت گزاره‌ی شرطی در نظر می‌گیرند. دقت کنید که اگرچه در برخی موارد با توجه به معنای گزاره‌ها این بیان می‌تواند درست به نظر آید، اما همان گونه که در مثال زیر می‌بینیم، این کاربرد به عنوان یک روش منطقی درست نمی‌باشد:

به جای "بعضی از اعداد زوج اول هستند." نمی‌توان گفت "برای بعضی از چیزها اگر آن چیز عددی زوج باشد آنگاه اول است!" زیرا گزاره اول درست است اما گزاره دوم نادرست، زیرا هر عدد زوجی اول نیست!

در واقع هنگامی که از حکمی برای "بعضی" یا "دست کم یکی" از چیزها سخن می‌گوئیم، وجود آن‌ها را در نظر گرفته-ایم، پس نیازی به بیان شرط اضافه‌تری نداریم.

همچنین سور عمومی به سور وجودی قابل تبدیل نیست. قاعده‌ای که در منطق قدیم به عکس مستوی موسوم است در منطق جدید رد می‌شود. این قاعده می‌گوید از گزاره‌ی کلی "برای هر X داریم Y " نتیجه می‌شود، "برای بعضی از Y داریم X ". اگرچه ممکن است هردوی این گزاره‌ها درست باشند، اما درستی دومی نتیجه‌ی منطقی از گزاره اول نیست. در این جا نیز مانند بالا در برخی موارد تناقض معنایی پدید می‌آید و لذا به کار بردن این قاعده درست نیست. مثلاً از گزاره‌ی درست "هر جواب حقیقی معادله‌ی $x^2 = -1$ عددی زوج است"، نمی‌توان گزاره‌ی نادرست "بعضی از اعداد زوج جواب‌های حقیقی معادله‌ی $x^2 = -1$ هستند" را نتیجه گرفت (دقت کنید که گزاره‌ی اول درست و گزاره دوم نادرست است، زیرا این معادله هیچ جواب حقیقی ندارد).

یک مورد دیگر که در نوشتن سورها مهم است، عدم جابه‌جا کردن ترتیب آن‌هاست. تغییر در ترتیب نوشتن سورها می‌تواند معنا یا ارزش گزاره را تغییر دهد. به عنوان مثال به تفاوت ظاهری و معنایی دو گزاره زیر دقت کنید:

برای هر عدد غیر صفر x عددی مانند y وجود دارد که $xy = 1$

عددی مانند y وجود دارد که برای هر عدد غیر صفر x ، $xy = 1$

۷. استنتاج و قواعد اثبات: برخی از روش‌های اثبات

به طور شهودی یک استنتاج ریاضیاتی دارای ساختاری به صورت زیر است:

تعدادی پیش فرض (شامل: تعاریف، اصول موضوعه در مورد موضوع بحث، گزاره‌های درست (قضیه ها))

مراحل استدلال (گام‌های مختلف استنتاج) به تعدادمتهای، به دست آمده از پیش‌فرض‌ها و قواعد اثبات

پیامد یا نتیجه یا حکم نهایی

اگر $p_1, p_2, \dots, p_n$ پیش‌فرض‌ها و q نتیجه باشد، دیاگرام بالا را به صورت زیر نمایش می‌دهیم.

$$p_1, p_2, \dots, p_n \vdash q$$

منظور از *اثبات* یا *بررسی درستی* یک *استنتاج*، بررسی درستی نتیجه یا حکم نهایی می‌باشد، با فرض اینکه پیش‌فرض‌ها برقرار هستند. اگر از درستی پیش‌فرض‌ها در هر حالت ممکن ارزش درست برای حکم بدست آید، می‌گوئیم که q نتیجه‌ی منطقی $p_1, p_2, \dots, p_n$ است و این استنتاج معتبر است. در واقع یک استنتاج مانند بالا نوعی به‌کارگیری از گزاره‌ی شرطی به تعداد متهای است، یعنی به صورت:

$$(p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow (p_3 \rightarrow (\dots \rightarrow p_n) \dots))) \rightarrow q$$

که می‌دانیم یک گزاره‌ی شرطی در حالتی که فرض آن نادرست باشد، درست است. پس حالات با فرض‌های نادرست نیاز به بررسی ندارند. تنها حالت باقیمانده این است که با فرض‌های درست، درستی حکم بررسی شود.

برای این کار یک راه استفاده از جداول تعیین ارزش است که با افزایش تعداد گزاره‌های پیش‌فرض و پیچیدگی نتیجه کار سخت و طولانی خواهد بود (می‌دانیم با n گزاره‌ی ساده 2^n سطر در جدول تعیین ارزش لازم است).

روش بهتر، همان‌گونه که در نمودار بالا اشاره شد، استفاده از قواعد منطقی است که به قواعد اثبات موسوم هستند. برخی از آن‌ها را در بخش قبل دیدیم و تعدادی هم در تمرین‌های ۳۸ تا ۴۵ و ۵۱ تا ۶۱ آورده شده‌اند. در ادامه چند مورد از قواعد معروف و کاربردی‌تر را در قالب روش‌هایی برای اثبات بررسی می‌کنیم.

۷.۱. روش اثبات مستقیم

در این روش تنها به کمک پیش‌فرض‌ها، تعاریف، اصول و قضایای قبلاً اثبات شده و به کمک تعاریف رابط‌های ترکیب گزاره‌ها (یعنی قواعد اثبات برای نقیض و ترکیب‌های عطفی و فصلی و شرطی) به اثبات فرمول یا گزاره‌ی نتیجه می‌پردازیم.

مراحل اثبات را به صورت گزاره‌های متوالی زیر هم و دلیل هر مرحله را روبروی آن می‌نویسیم. دقت کنید که نوشتن مراحل به صورت:

$$p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow p_n$$

از نظر منطقی ایراد دارد، زیرا در هر مرحله فرض و حکم گزاره‌ی شرطی مشخص نیست. اما با توجه به قرارداد ما برای انجام اولویت عملیات‌ها از سمت چپ و برای سادگی در نوشتار و خلاصه‌نویسی (به شرطی که ابهامی پیش نیاید) گاهی به صورت مذکور مراحل اثبات را می‌نویسیم. به عنوان مثال در ادامه قضیه روبرو را ثابت می‌کنیم: "در تقسیم مربع هر عدد فرد بر هشت، باقی‌مانده عدد یک خواهد بود."

فرض: x عددی فرد است. **حکم:** باقی‌مانده‌ی تقسیم x^2 بر هشت عدد یک است.

اثبات:

- (۱) x عددی فرد است. (فرض)
- (۲) عدد صحیح k وجود دارد به طوریکه $x = 2k + 1$ (بنا به (۱) و تعریف عدد فرد)
- (۳) x را به توان دو می‌رسانیم: $x^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1$ (بنا به (۲) و خواص چندجمله‌ای‌ها)
- (۴) با ساده‌سازی داریم (باید به دنبال عامل ۸ در عبارت بالا باشیم): $x^2 = 4k(k + 1) + 1$ (بنا به (۳) و فاکتورگیری از $4k$ در دو جمله‌ی اول)
- (۵) از دو عدد صحیح متوالی k و $(k + 1)$ حتماً یکی زوج است و می‌دانیم (از قضایای ساده حساب) که حاصل ضرب یک عدد زوج در هر عدد صحیح دیگر زوج است. پس $k(k + 1)$ زوج می‌باشد. (از حساب و نظریه اعداد)
- (۶) پس عدد صحیح k' وجود دارد که $k(k + 1) = 2k'$ (از (۵) و تعریف عدد زوج)
- (۷) با جاگذاری در بالا داریم: $x^2 = 4k(k + 1) + 1 = 4 \times 2k' + 1 = 8k' + 1$ (بنا به (۴) و (۶))
- (۸) پس $x^2 = 8k' + 1$ که بنا به قضیه الگوریتم تقسیم به معنی این است که باقی‌مانده‌ی تقسیم x^2 بر ۸ برابر ۱ است. (بنا به الگوریتم تقسیم)
- (۹) حکم ثابت شد. ■

۲.۷. روش اثبات عکس نقیض

همانگونه که در بخش ۶ بیان شد، یک معادل برای یک گزاره‌ی شرطی، گزاره‌ی عکس نقیض آن می‌باشد، یعنی،

$$p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p.$$

پس به جای اثبات درستی حکم شرطی می‌توان عکس نقیض آن را اثبات نمود. این روش در بسیاری اوقات فرآیند اثبات را ساده‌تر می‌کند. مثلاً فرض کنیم می‌خواهیم ثابت کنیم،

"اگر مربع عددی زوج باشد، آنگاه خود عدد نیز زوج است."

اثبات مستقیم این حکم کار ساده‌ای نیست. (ببینید که چرا ساده نیست! آیا می‌توانید آن را به‌طور مستقیم ثابت کنید؟! کمی سعی کنید!) اما اثبات گزاره‌ی عکس نقیض آن ساده‌تر می‌باشد؛ پس به جای این گزاره ثابت می‌کنیم:

"اگر عددی زوج نباشد (یعنی فرد باشد)، مربع آن هم زوج نیست (فرد است)."

که به سادگی قابل انجام است (آنرا ثابت کنید!). البته خود گزاره‌ی عکس نقیض را می‌توان به روش مستقیم یا هر روش ممکن دیگر ثابت کرد.

۳.۷. اثبات به روش برهان خلف

این روش نیز که بسیار معروف است طرفداران زیاد و البته مخالفینی هم دارد! این روش بدین صورت است که برای اثبات درستی گزاره‌ی شرطی $p \rightarrow q$ مانند روش عکس نقیض، درستی نقیض حکم، یعنی $q \sim$ ، را به عنوان یکی دیگر از فرض‌های گزاره‌ی اصلی در نظر گرفته و سعی می‌کنیم با کمک روش‌های مختلف به یک گزاره دروغگو (تناقض یا گزاره همیشه نادرست) مانند C برسیم (یعنی درستی $C \rightarrow q \sim$ را ثابت کنیم). برای این کار اجازه داریم از فرض p و قضایا و اصول دیگر استفاده کنیم و گزاره‌ی C نیز می‌تواند نقیض فرض‌های اصلی یا یکی از قضایای قبلاً اثبات شده باشد. در این صورت چون استنتاج ما درست می‌باشد، باید گزاره‌ی شرطی $C \rightarrow q \sim$ درست باشد، اما چنین نیست، زیرا با یک فرض درست نتیجه‌ای نادرست بدست آمده که بنا به جدول تعیین ارزش گزاره‌ی شرطی این گزاره ارزش نادرست دارد. پس نتیجه می‌گیریم که فرض $q \sim$ نمی‌تواند درست باشد (دقت کنید ذات گزاره‌ی شرطی چنین است که از یک فرض درست و یک استنتاج درست به کمک قواعد منطقی درست، حتماً باید نتیجه‌ای درست بدست آید. حال که استنتاج درست بوده و نتیجه درست نبوده پس حتماً فرض باید نادرست باشد). اکنون چون از دو گزاره q و $q \sim$ یکی و تنها یکی باید درست باشد، و فرض $q \sim$ نادرست است، پس باید q درست باشد.

یکی از دلایل عدم پذیرش این برهان از جانب برخی از افراد همین جمله‌ی اخیر است. زیرا به عقیده برخی یک گزاره می‌تواند ارزش‌های دیگری به جز درستی یا نادرستی داشته باشد! این منجر به ایجاد شاخه‌های دیگری از منطق به نام منطق چند ارزشی شده است که در جای خود کاربرد فراوانی در تمامی علوم دارد. در هر صورت روش برهان خلف در منطق کلاسیک دوازده‌گانه (بله، خیر یا درست، نادرست یا 0، 1) بسیاری از اثبات‌های پیچیده را ساده کرده است و بدون آن بسیاری از قضایا اثباتی پیچیده و طولانی و دور از ذهن خواهند داشت.

مثال ۳.۷.۱. می‌خواهیم ثابت کنیم: دو منحنی حقیقی $y = x^2$ و $y = x - 1$ یکدیگر را قطع نمی‌کنند.

فرض: دو منحنی $y = x^2$ و $y = x - 1$ دارای مقادیر حقیقی هستند و روی اعداد حقیقی در نظر گرفته شده‌اند.

حکم: این دو یکدیگر را در صفحه‌ی حقیقی قطع می‌کنند.

(قبل از شروع اثبات، آیا می‌توانید این گزاره درست را به روشی دقیق به‌جز برهان خلف ثابت کنید؟! بررسی کنید!)

اثبات به روش برهان خلف:

(۱) فرض کنیم حکم درست نباشد، یعنی این دو منحنی در دست کم یک نقطه یکدیگر را قطع کنند. (فرض خلف)

(۲) پس دارای حداقل یک نقطه مشترک مانند (a, b) هستند، یعنی برای دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$b = a^2 \text{ و } b = a - 1 \quad (\text{از ساده سازی فرض خلف و تعریف تقاطع منحنی ها})$$

(۳) پس: $a^2 = a - 1$ (بنا به (۳) و خاصیت تعدی برای تساوی چندجمله‌ای‌ها)

(۴) در نتیجه: $a^2 - a + 1 = 0$ ، برای یک مقدار حقیقی از a . (بنا به (۴) و تعریف تساوی)

(۵) اما این تناقض با قضیه‌ی وجود جواب معادله‌ی درجه‌ی دو است، زیرا برای این معادله‌ی درجه‌ی دو حاصل $\Delta =$

-3 منفی می‌باشد و لذا این معادله نباید جواب حقیقی داشته باشد. (بنا به (۵) و قضیه‌ی جواب معادله درجه

(دو)

۶) پس فرض خلف باطل (نادرست) است و لذا بنا به روش برهان خلف باید خود گزاره‌ی حکم صحیح باشد. ■

۴.۷. اثبات هم‌ارز بودن گزاره‌ها

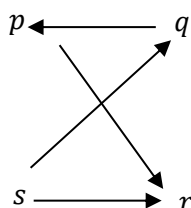
همان‌گونه که در تعریف هم‌ارزی $p \Leftrightarrow q$ دیدیم، برای اثبات درستی آن باید درستی هر دو گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ و $p \Leftarrow q$ را با کمک روش‌های اثبات ممکن ثابت کنیم. برای اثبات معادل بودن بیش از دو گزاره با توجه به تعریف گزاره‌های هم‌ارز باید با ترتیبی که به صورت دلخواه مشخص می‌کنیم از درستی هر یک دیگری را ثابت کنیم. با توجه به خاصیت تعدی گزاره‌های شرطی که در تمرین ۴۵ داده شده است، لزومی ندارد که معادل بودن هر دو تا از گزاره‌ها به‌طور جداگانه اثبات شود. بلکه می‌توانیم با ترتیبی که خود مشخص کرده‌ایم شروع به اثبات گزاره‌ها کنیم و در نهایت از گزاره‌ی آخر گزاره‌ی ابتدایی را نتیجه بگیریم. در واقع در یک روند دوری ثابت کرده‌ایم که همه‌ی این گزاره‌ها معادلند. مثلاً اگر بخواهیم ثابت کنیم که گزاره‌های p و q و r و s معادل هستند، می‌توان به صورت زیر گزاره‌های شرطی بین آن‌ها را ثابت کرد:

$$\begin{array}{ccc} p & \rightarrow & q \\ \uparrow & & \downarrow \\ s & \leftarrow & r \end{array}$$

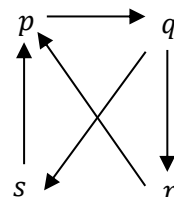
در این صورت ثابت کرده‌ایم:

- (۱) اگر p آنگاه q ,
- (۲) اگر q آنگاه r ,
- (۳) اگر r آنگاه s ,
- (۴) اگر s آنگاه p .

در این صورت بنا به خاصیت تعدی گزاره‌های شرطی هر دو گزاره از بین این چهار گزاره هم‌ارز می‌باشند (بررسی کنید!). بنابراین برای اثبات هم‌ارزی n گزاره دست‌کم باید درستی n شرط را اثبات کنیم. اگرچه گاهی این کار دشوار است و ممکن است با تغییر ترتیب گزاره‌ها ساده‌تر شود یا اینکه از یک گزاره به عنوان واسطه اثبات هم‌ارزی با بقیه استفاده شود که در نمودارهای زیر می‌بینیم:



تغییر در ترتیب اثبات شرطها



واسطه قراردادن q برای اثبات هم‌ارزی p و r و s .

مثال ۲.۷. ثابت کنید گزاره‌های زیر برای تابع حقیقی و ناصفر f معادل هستند:

- (۱) تابع f تابعی نزولی است.
- (۲) تابع $\frac{1}{f}$ تابعی صعودی است.
- (۳) تابع $-f$ تابعی صعودی است.

اثبات. تمرین (اگر لازم است ترتیب گزاره‌ها را برای ساده‌تر شدن اثبات تغییر دهید).

۵.۷. اثبات به روش استقرای ریاضی

روش استقرا در اثبات درستی گزاره‌هایی استفاده می‌شود که برای تعداد نامتناهی از اعداد طبیعی قابل بیان باشند (یا برای مجموعه‌ای از عناصر که با مجموعه‌ی اعداد طبیعی در تناظر باشند و بتوان روی عناصر آن ترتیبی مشابه ترتیب اعداد طبیعی قرار داد). به همین سبب بررسی این گزاره‌ها بصورت مستقیم ممکن نیست یا دشوار می‌باشد. در این روش نتیجه مورد نظر را برای تعدادی از عناصر عالم سخن اثبات می‌کنیم و سپس آن‌را به تمام مجموعه‌ی عناصر مورد نظر تعمیم می‌دهیم. پس این روش شامل سه مرحله است:

گام اول یا حالت پایه: بررسی درستی حکم مورد نظر برای اولین عنصر قابل استفاده از عالم سخن برای حکم مورد نظر.

گام دوم یا فرض استقرا: بیان حکم برای یک عنصر دل‌خواه از مجموعه مرجع و فرض درستی حکم برای آن عنصر (و عناصر کوچکتر از آن).

گام سوم یا حکم استقرا: استفاده از فرض استقرا و اثبات حکم برای هر عنصر دل‌خواه از مجموعه‌ی مرجع مورد نظر. این روش به عنوان یک قضیه به صورت زیر بیان می‌شود:

قضیه ۳.۷. (اصل استقرای ریاضی): فرض کنید $P(n)$ گزاره‌ای در ارتباط با اعداد طبیعی باشد. فرض کنید k_0 کوچکترین مقداری باشد که این گزاره برای آن تعریف می‌شود. اگر $P(k_0)$ درست باشد و همچنین برای یک k با فرض درستی $P(k)$ بتوان درستی گزاره‌ی $P(k+1)$ را اثبات نمود، آن‌گاه گزاره‌ی $P(n)$ برای هر عدد طبیعی $n \geq k_0$ درست می‌باشد.

طبق این قضیه از روش استقرا می‌توانیم برای اثبات بسیاری از احکام با شرایطی که توضیح داده شد استفاده نمائیم. فقط چند نکته در این باره باید حتماً مورد توجه باشد:

- به فرض‌های مسأله خوب توجه داشته باشیم و فرضی نادرست را به آن‌ها اضافه یا از آن‌ها کم نکنیم. بویژه در مرحله سوم استقرا (اثبات حکم استقرا به کمک فرض استقرا) شرایط مسأله می‌توانند اثرگذار باشند.

- همچنین در گام سوم استقرا برای یک عنصر دلخواه درستی را فرض کرده ایم و برای عنصر بعد از آن باید آن را ثابت کنیم. به دلخواه بودن این عنصر توجه کنید. همچنین تمامی حالات ممکن برای این اثبات را باید در نظر بگیریم (نه اینکه با زدن مثال و در حالت‌های خاص) و در این اثبات باید حتماً از فرض استقرا استفاده کنیم، در غیراین صورت اثبات اشکال دارد. دقت کنید که در این مرحله باید همه‌ی مفاهیم تعریف شده دقیق و بامعنی باشند و از قواعد منطق در اثبات استفاده شود.

مواردی از بی توجهی به نکات بالا را در تمرین‌های ۱۹۰ و ۱۹۱ بررسی کنید.

مثال ۴.۷. به استقراء ثابت نمائید: در هر n ضلعی محدب مجموع زوایای داخلی برابر است با $(n-2) \times 180^\circ$.

اثبات. از آن‌جا که کمترین تعداد اضلاع در چندضلعی منتظم ۳ می‌باشد پس فرض می‌کنیم $n \geq 3$.

گام اول: حکم برای $n = 3$ برقرار است، زیرا، از هندسه می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث (سه ضلعی منتظم) برابر است با $180^\circ = (3 - 2) \times 180^\circ$. البته این خود نیاز به اثبات دارد، که یک روش برای آن رسم خطی گذرنده از یک رأس و موازی با ضلع مقابل آن و بحث روی زوایای پدید آمده است! شما اثبات آن را جستجو و بررسی نمایید!

فرض استقرا: مجموع زوایای داخلی هر n ضلعی محدب برابر است با، $(n - 2) \times 180^\circ$.

حکم استقرا: مجموع زوایای داخلی هر $n + 1$ ضلعی محدب برابر است با:

$$((n + 1) - 2) \times 180^\circ = (n - 1) \times 180^\circ$$

(که باید آن را با کمک فرض استقرا بدست آوریم).

برای اثبات حکم استقرا، فرض کنید $A_1.A_2...A_n.A_{n+1}$ رئوس (مرتب شده به ترتیب مجاورت) از یک $n + 1$ ضلعی محدب باشد (که با توجه به فرض مسأله حداقل ۴ ضلعی است).

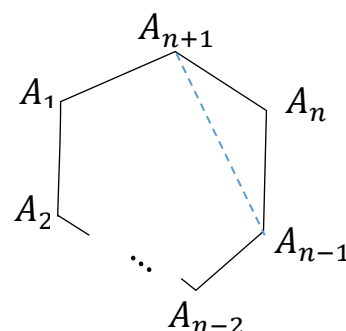
رأس A_{n+1} را به رأس A_{n-1} متصل می‌کنیم (قطر را رسم می‌کنیم)؛ در این صورت $n + 1$ ضلعی به یک n ضلعی $(A_1A_2...A_{n-1}A_{n+1})$ و یک مثلث (مثلث $A_{n-1}A_nA_{n+1}$) مجزا از هم تبدیل می‌شود (شکل زیر را ببینید) و لذا مجموع زوایای داخلی آن برابر مجموع زوایای داخلی این دو می‌باشد. اما بنا به فرض استقرا و گام اول آن داریم:

$$= (\text{مجموع زوایای داخلی } A_1A_2...A_{n-1}A_nA_{n+1})$$

$$+ (\text{مجموع زوایای داخلی مثلث } A_{n-1}A_nA_{n+1})$$

$$= (\text{مجموع زوایای داخلی چندضلعی } A_1A_2...A_{n-1}A_{n+1})$$

$$= (n - 2) \times 180^\circ + 180^\circ = (n - 1) \times 180^\circ$$



پس حکم استقرا ثابت شد. بنابراین حکم مسأله درست می‌باشد. ■

۶.۷. بکار بردن مثال نقض

مثال‌ها برای روشن‌تر شدن و توضیح اثبات‌ها به کار برده می‌شوند. همچنین هرگاه می‌خواهیم وجود چیز یا خاصیتی را ثابت کنیم (یک قضیه با سور وجودی را اثبات کنیم)، کافی است برای آن یک مثال بزنیم. اما توجه داشته باشید که در غیر از این موارد مثال‌ها نمی‌توانند اثباتی برای درستی یک قضیه باشند! این نوع سوء تفاهم است که بسیاری از دانشجویان با زدن مثال به دنبال اثبات یک قضیه یا یک سور کلی (عمومی) هستند. مراقب باشید شما دچار این سوء برداشت نشوید!

دقت کنید که یک مثال برای یک گزاره با سور عمومی یک حالت از همه‌ی حالات ممکن از عالم سخن (مجموعه‌ی مرجع) آن گزاره است؛ پس اگر بخواهیم از مثال برای اثبات استفاده کنیم باید تمام حالات ممکن از مجموعه‌ی مرجع را مثال بزنیم، و نه فقط یکی یا چند تا از آن‌ها را، که این در بیشتر موارد کاری دشوار یا غیرممکن است. مثلاً می‌دانیم که تساوی

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2$$

برای $a = 0$ و $b = 1$ برقرار است:

$$(0 + 1)^2 = 1^2 = 0^2 + 1^2$$

اما آیا در حالت کلی، برای هر دو عدد حقیقی a و b هم درست است؟! می‌دانیم که در حالت کلی داریم:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab \neq a^2 + b^2$$

پس با یک مثال مانند بالا نمی‌توان درستی تساوی اول را ثابت کرد.

اما برای رد کردن درستی یک گزاره کلی (با سور عمومی) می‌توانیم از مثال استفاده کنیم. در واقع برای اثبات نادرستی یک گزاره کلی، اجازه داریم با زدن یک مثال نادرستی آن گزاره را ثابت کنیم. می‌توانید بگویید چرا این کار منطقی است؟! به چنین مثالی یک مثال نقض یا گاهی نامثال می‌گوییم، زیرا برای رد کردن (نقض کردن) درستی یک گزاره به کار می‌رود.

به عنوان مثال می‌توان با یک مثال نقض درستی تساوی اول در مثال بالا را رد کرد (نادرستی آن را ثابت کرد):

برای $a = 1$ و $b = 2$:

$$(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$$

اما

$$1^2 + 2^2 = 5$$

$$\text{که } 9 \neq 5$$

۷.۷. اهمیت اثبات در ریاضیات: چرا اثبات می‌کنیم؟

اکنون که برخی از مهم‌ترین روش‌های اثبات در ریاضیات را بررسی کردیم، این پرسش هم‌چنان باقی می‌ماند که اصولاً چه نیازی به اثبات وجود دارد! شاید نتوان جوابی به این پرسش داد، ولی آن‌چه پیداست این است که ذهن بشر به‌شکل طبیعی ساختاری منطقی پیدا کرده است و برای پذیرش هر چیزی نیاز به اقناع دارد. شاید بتوان گفت بهترین روش اقناع ذهن اثبات است. زیرا پس از اثبات معمولاً دیگر چیزی برای بحث باقی نمی‌ماند! اما جالب است که در ریاضیات این‌گونه نیست! اثبات یک گزاره ریاضی می‌تواند شروع سلسه اثبات‌هایی برای گزاره‌های دیگر باشد. به همین دلیل گاهی هدف از اثبات یک گزاره صرفاً بیان دلایل و فهم درستی آن نیست. بلکه با اثبات برخی از گزاره‌ها تلاش می‌کنیم تا چیزی را یاد بگیریم یا روشی را بسازیم تا به تفکر مرحله به مرحله و الگوریتمی ما شکل بهتری ببخشد. از این‌رو معمولاً اثبات‌هایی که به کمک آن‌ها می‌توان روش‌هایی برای ایجاد ساختارهای جدید را شناخت، اهمیت بیشتری دارند. این‌گونه از اثبات‌ها را اثبات‌های ساختار ساز یا الگوساز یا شرح دهنده می‌نامیم. برخی از این اثبات‌ها منجر به ایجاد یک مثال برای ساختاری مشخص می‌شوند که به آن شاهد می‌گویند. در واقع این شاهد وجود چیزی یا برقراری شرایط گزاره را ثابت می‌کند. به عنوان یک نمونه ساده، گزاره زیر را در نظر بگیرید:

هر معادله درجه دو مانند $x^2 + 2bx + c = 0$ که در آن $b^2 > c$ دو ریشه حقیقی دارد.

– کدام یک از گزاره های تمرین قبل راستگو هستند؟ نشان دهید گزاره های زیر راستگو (قضیه) هستند.

$$p \wedge q \rightarrow p \quad (35)$$

$$p \rightarrow p \wedge p \quad (34)$$

$$p \rightarrow p \quad (33)$$

$$(p \vee q) \wedge \sim p \rightarrow q \quad (37)$$

$$p \rightarrow p \vee q \quad (36)$$

– به کمک جداول گزاره های تمرین های بالا درستی هم ارزی های زیر را بررسی کنید.

$$38) \sim(\sim p) \equiv p \quad (\text{قاعده نقیض مضاعف})$$

$$39) p \wedge p \equiv p, p \vee p \equiv p \quad (\text{قاعده خوتوانی})$$

$$40) p \vee q \equiv q \vee p, p \wedge q \equiv q \wedge p \quad (\text{قاعده جابجایی})$$

$$41) p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p \quad (\text{قاعده عکس نقیض})$$

$$42) \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q, \sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad (\text{قانون دمورگان})$$

$$43) p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r, (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r) \quad (\text{قانون شرکت پذیری})$$

$$44) p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r), p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \quad (\text{قانون پخشی یا توزیع پذیری})$$

$$45) (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \equiv (p \rightarrow r) \quad (\text{قانون تعدی در شرط})$$

$$46) (p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$$

$$47) (p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$48) (p \vee q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

$$49) (p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \vee (q \rightarrow r)$$

$$50) (p \wedge q) \rightarrow r \equiv (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$$

– فرض کنید c یک گزاره دروغگو (همیشه نادرست یا تناقض) و t یک گزاره راستگو و p و q و r و s گزاره –

های دلخواه باشند. قضایای زیر که انواعی از روش های اثبات می باشند را ثابت کرده (با کمک جدول تعیین ارزش یا با قواعد ثابت شده در تمرین های بالا) و برای هر کدام یک مثال بزنید.

$$51) c \Rightarrow p$$

$$52) p \Rightarrow t$$

$$53) (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \Rightarrow (p \vee q) \rightarrow r$$

$$54) (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (p \vee r \rightarrow q \vee s)$$

$$55) (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (p \wedge r \rightarrow q \wedge s)$$

$$۵۶) (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (\sim q \vee \sim s \rightarrow \sim p \vee \sim r)$$

$$۵۷) (p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s) \Rightarrow (\sim q \wedge \sim s \rightarrow \sim p \wedge \sim r)$$

$$۵۸) (p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q \text{ (قیاس استثنایی)}$$

$$۵۹) (p \rightarrow q) \wedge \sim q \Rightarrow \sim p \text{ (قیاس دافع)}$$

$$۶۰) (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \rightarrow q \wedge \sim p \text{ (برهان خلف)}$$

$$۶۱) (p \rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q) \rightarrow c$$

- سلول های خالی هر یک از جداول زیر را کامل کنید (هر جدول با دو گزاره یکی با ترکیب عطفی و دیگری با ترکیب فصلی از گزاره های ساده).

۶۲)

p	q		
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	F	F

۶۳)

p	q		
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	F	F

۶۴)

p	q		
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	F	F

۶۵)

p	q		
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

۶۶)

p	q		
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	T	T

۶۷)

p	q		
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

۶۸)

p	q		
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

p	q		
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

– به کمک جداول تمرین بالا و بکارگیری هر دو صورت نرمال عطفی و فصلی جداول زیر را کامل کنید.

۷۰)

p	q		
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	F	F

۷۱)

p	q		
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	F	F

۷۲)

p	q		
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

۷۳)

p	q		
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	F

۷۴)

p	q		
T	T	F	F
T	F	F	F
F	T	T	T
F	F	T	T

۷۵)

p	q		
T	T	F	F
T	F	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T

۷۶) همان گونه که در قواعد سورها گفته شد، می توان نشان داد که سور عمومی به نوعی ترکیب عطفی و سور وجودی به نوعی ترکیب فصلی تعدادی گزاره نما هستند که در عالم سخن تبدیل به گزاره می شوند. مثلاً در حالت متناهی اگر عالم سخن مجموعه ی $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ باشد، داریم:

$$\forall x P(x) \equiv P(u_1) \wedge P(u_2) \wedge \dots \wedge P(u_n)$$

$$\exists x P(x) \equiv P(u_1) \vee P(u_2) \vee \dots \vee P(u_n)$$

با توجه به این موضوع و تعمیم قواعد دمرگان نشان دهید:

$$\sim (\exists x P(x)) \equiv \forall x \sim P(x) \quad \text{و} \quad \sim (\forall x P(x)) \equiv \exists x \sim P(x)$$

- در هریک از سوالات ۷۷ تا ۱۴۷، گزاره‌های ساده و رابط‌های منطقی بین جملات را در صورت وجود مشخص نمایید و آن‌ها را در صورت امکان به فرم صوری (ریاضی) بنویسید. همچنین نقیض هر یک را به فرم صوری (نمادی) و جملات معنایی بیان کنید. در مورد گزاره‌های شرطی نیز، عکس هرکدام و عکس نقیض هر یک را (به شکل صوری و نیز معنایی) بیان کنید. به‌علاوه در هر مورد، در صورت وجود، حداقل دو عالم سخن برای گزاره‌ی مورد نظر بیان کنید.

(۷۷) اکنون شب است.

(۷۸) بهرام سحرخیز است.

(۷۹) بهرام ساعت ۵ از خواب بیدار می‌شود.

(۸۰) سعدی شیرازی است.

(۸۱) سعدی ۴ حرف دارد.

(۸۲) حرف "ی" از حروف نقطه دار الفبای فارسی است.

(۸۳) در فارسی حرف "ی" فقط در وسط کلمات نقطه دار می‌شود.

(۸۴) تصویر ۳ در آینه به حرف ع تبدیل می‌شود.

(۸۵) عدد سه از حروف الفبای فارسی است.

(۸۶) سه دو حرف دارد.

(۸۷) عددی هست که زوج است.

(۸۸) هر عددی زوج است.

(۸۹) هر عدد صحیح زوج است.

(۹۰) $x+2$ زوج است مگر آنکه x فرد باشد.

(۹۱) دقیقاً دو عدد صحیح مثبت کوچکتر از ۳ وجود دارد.

(۹۲) تابع f در نقطه $x = a$ حدی برابر L دارد.

(۹۳) تابع f از X به Y در هر نقطه a از دامنه اش حد دارد.

(۹۴) برای هر عدد عددی بزرگتر از آن هست.

(۹۵) عددی هست که از هر عددی بزرگتر است.

(۹۶) هر تابع مشتق پذیر پیوسته است.

(۹۷) اگر f تابعی مشتق پذیر باشد، آنگاه f پیوسته است.

(۹۸) هر عدد اول و زوج برابر ۲ است.

(۹۹) اگر x عددی اول و زوج باشد آنگاه $x=2$.

(۱۰۰) یک عدد صحیح مضرب ۳ است اگر مضرب ۹ باشد.

(۱۰۱) یک عدد صحیح ۳ است تنها اگر مضرب ۹ باشد.

(۱۰۲) برای اینکه یک عدد مضرب ۹ باشد، لازم است که آن عدد مضرب ۳ باشد.

(۱۰۳) برای اینکه یک عدد مضرب ۳ باشد، کافی است که آن عدد مضرب ۹ باشد.

(۱۰۴) برای اینکه یک عدد مضرب ۹ باشد، کافی است که آن عدد مضرب ۳ باشد.

(۱۰۵) هرگاه ضرب دو عدد فرد باشد، آن دو عدد فرد هستند.

$$\log 9 - 2 \log 3 = 0 \quad (106)$$

$$\log a^2 - 2 \log a = 0 \quad (107)$$

$$\log a^2 - 2 \log a = 0, a > 0 \quad (108)$$

(۱۰۹) یک شرط لازم و کافی برای اینکه دو چند جمله ای برابر باشند این است که تمام ضرایب جملات متناظر آنها نظیر به نظیر برابر باشند.

(۱۱۰) (اصل خوشترتیبی) هر زیر مجموعه از اعداد طبیعی (نسبت به رابطه‌ی کمتر یا مساوی) کوچکترین عنصر دارد.

(۱۱۱) مجموعه اعداد طبیعی (نسبت به رابطه‌ی کمتر یا مساوی) بزرگترین عضو ندارد.

(۱۱۲) (خاصیت ارشمیدسی اعداد) برای هر دو عددی حقیقی که حداقل یکی از آن‌ها مثبت است یک مضرب طبیعی از عدد مثبت موجود است که از عدد دیگر بزرگتر باشد.

(۱۱۳) (تعبیر هندسی خاصیت ارشمیدسی اعداد) هر پاره خط هر چقدر هم که دراز باشد با تعداد متناهی پاره خط هر اندازه هم که کوچک باشند پوشیده می شود.

(۱۱۴) (تعریف تابع) رابطه‌ی f از مجموعه A به مجموعه B یک تابع است هرگاه به هر عنصر A یک عنصر یکتا از B را نظیر کند.

(۱۱۵) (تعریف تابع یک به یک) تابع f از مجموعه A به مجموعه B یک به یک است هرگاه دو عنصر متفاوت تصویر متفاوت داشته باشند.

(۱۱۶) دو تابع تنها زمانی برابرند که دامنه یکسان داشته باشند و مقادیر آن دو در هر نقطه از این دامنه نیز برابر باشند.

(۱۱۷) جزء صحیح $3/2$ برابر ۳ است.

(۱۱۸) (قضیه یکتایی حد) حد یک تابع در یک نقطه در صورت وجود یکتاست.

- (۱۱۹) شرط لازم برای وجود حد تابع f ، یکتا بودن حد آن است.
- (۱۲۰) (قضیه مقدار میانی) هر تابع پیوسته f روی بازه بسته $[a, b]$ تمامی مقادیر بین $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می کند.
- (۱۲۱) (قضیه مقدار اکسترمم) هر تابع پیوسته روی یک بازه بسته ماکزیمم مطلق و مینیمم مطلق دارد.
- (۱۲۲) (قضیه مشتق مرتبه اول برای اکسترمم) اگر تابع f در یک نقطه از دامنه اش دارای ماکزیمم یا مینیمم موضعی باشد آنگاه مشتق تابع f در آن نقطه در صورت وجود برابر صفر است.
- (۱۲۳) هر تابع پیوسته انتگرال پذیر است.
- (۱۲۴) قدر مطلق عدد حقیقی x برابر a است اگر و تنها اگر $x = \pm a$.
- (۱۲۵) قدر مطلق عدد حقیقی x بزرگتر از عدد مثبت a است اگر و تنها اگر $x > a$ یا $x < -a$.
- (۱۲۶) قدر مطلق عدد حقیقی x کوچکتر از عدد مثبت a است اگر و تنها اگر $-a < x < a$.
- (۱۲۷) مجموعه اعداد حقیقی نسبت به عمل جمع اعداد عضو بی اثر یکتایی دارد که آن را صفر می نامیم.
- (۱۲۸) هر عدد حقیقی ناصفر دارای وارون (قرینه) یکتا نسبت به ضرب (جمع) اعداد است.
- (۱۲۹) (قضیه اساسی حساب) هر عدد طبیعی بزرگتر از یک را می توان به صورت یکتایی به شکل حاصلضرب عوامل اول نوشت.
- (۱۳۰) (حدس گلدباخ که تاکنون رد یا تایید نشده است) هر عدد زوج بزرگتر از ۳ به صورت مجموع دو عدد اول نوشته می شود.
- (۱۳۱) عدد دلخواه x اول است اگر و تنها اگر دقیقاً دو شمارنده (مقسوم علیه) داشته باشد.
- (۱۳۲) هیچ عدد اول بزرگتر از ۲ زوج نیست.
- (۱۳۳) باقیمانده مربع هر عدد صحیح در تقسیم بر ۴ برابر صفر است یا یک.
- (۱۳۴) برای هر سه عدد حقیقی a و b و c ، شرط لازم برای وجود جواب معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ این است که $b^2 - 4ac \geq 0$.
- (۱۳۵) برای هر سه عدد حقیقی a و b و c ، شرط کافی برای وجود جواب معادله درجه دو $ax^2 + bx + c = 0$ این است که $b^2 - 4ac \geq 0$.
- (۱۳۶) معادله $x^2 + 3x - 1 = 0$ جواب دارد.
- (۱۳۷) هر عدد حقیقی مثبت دقیقاً دو ریشه دوم دارد.
- (۱۳۸) هر معادله درجه دوم حداکثر ۲ ریشه حقیقی دارد.
- (۱۳۹) همه معادلات درجه دو در اعداد حقیقی یا یک ریشه دارند یا دو ریشه یا ریشه ای ندارند.
- (۱۴۰) (تعریف حد یک تابع حقیقی در یک نقطه) برای هر $\varepsilon > 0$ یک $\delta > 0$ موجود است به طوری که برای هر عدد x ، اگر فاصله x از a کمتر از δ باشد آنگاه فاصله $f(x)$ از L کمتر از ε می باشد.

(۱۴۱) (تعریف حد دنباله a_n در بی نهایت) برای هر عدد حقیقی دلخواه مثبت، عددی طبیعی موجود است که برای هر عدد بزرگتر از آن عدد طبیعی مانند n فاصله a_n از L از آن عدد حقیقی دلخواه کوچکتر باشد.

(۱۴۲) هیچ کس به همه شهرها سفر نکرده است اما برخی از شهرها را همه دیده اند.

(۱۴۳) او آمد و رفت.

(۱۴۴) او رفت و آمد.

(۱۴۵) اگر برجای من گیری گزیند دوست حاکم اوست حرامم باد اگر من جان به جای دوست بگزینم

(۱۴۶) از دل نرود (برود!) هر آن که از دیده برفت!

(۱۴۷) هر که سودای تو دارد چه غم از هر دو جهانیش نگران تو چه اندیشه و بیم از دگرانش

- با روش اثبات مستقیم گزاره های زیر را ثابت کنید.

(۱۴۸) جمع دو عدد صحیح فرد، عددی زوج می باشد.

(۱۴۹) برای هر سه عدد صحیح دلخواه a و b و c ، اگر a شمارنده ای از b و c باشد، آنگاه $b - c$ بر a بخش پذیر است.

(۱۵۰) میانگین دو عدد صحیح فرد متوالی، زوج است.

(۱۵۱) اگر f و g دو تابع غیرنزولی باشند، آنگاه $f \circ g$ (ترکیب این دو تابع) در صورت تعریف شدن غیرنزولی است.

(۱۵۲) دو خط به معادلات $y=2x+1$ و $y=-3x+2$ موازی نبوده و در یک نقطه مشترک هستند.

(۱۵۳) اگر x مضربی از ۳ باشد، آنگاه x فرد است یا مضرب ۶ می باشد.

(۱۵۴) اگر x عددی گویا باشد، آنگاه x^2 نیز گویاست.

- با روش عکس نقیض هر یک از گزاره های زیر را ثابت کنید.

(۱۵۵) اگر x^2 عددی زوج باشد، آنگاه x نیز زوج است.

(۱۵۶) اگر x^2 مضربی از عددی اول باشد، آنگاه x نیز مضربی از همان عدد اول است.

(۱۵۷) اگر حاصلضرب دو عدد صحیح زوج باشد، آنگاه حداقل یکی از آن ها زوج هستند.

(۱۵۸) اگر برای عدد صحیح n حاصل $7n+4$ زوج باشد، آنگاه n زوج است.

- با استقرای ریاضی گزاره های زیر را ثابت کنید (برای تمام اعداد طبیعی n).

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} \quad (۱۵۹)$$

$$(1 + 2 + 3 + \dots + n)^2 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 \quad (۱۶۰)$$

$$(۱۶۱) \quad \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(۱۶۲) هر چندجمله ای از درجه n با ضرایب حقیقی حداکثر n ریشه حقیقی دارد.

(۱۶۳) عدد طبیعی $4^n - 7^n$ بر ۳ بخش پذیر است.

(۱۶۴) برای هر عدد طبیعی $x > 3$ داریم: $x^3 \geq 3x^2 + 3x + 1$

(۱۶۵) فرض کنید a عددی بزرگتر از یک باشد. برای هر عدد طبیعی $k > 2$ داریم: $(1+a)^k > 1+ka$

(۱۶۶) برای هر عدد طبیعی $k > 2$ داریم: $5k! \geq k^2$

- گزاره های زیر را به روش برهان خلف ثابت کنید.

(۱۶۷) اگر x و y دو عدد حقیقی باشند و برای هر عدد مثبت a داشته باشیم $y \leq x + a$ آنگاه $y \leq x$.

(۱۶۸) برای هر عدد حقیقی x ، یا $\sqrt{3} + x$ گنگ است یا $\sqrt{3} - x$.

(۱۶۹) کوچکترین عدد گویای بزرگتر از $\sqrt{2}$ وجود ندارد.

(۱۷۰) تعداد اعداد اول نامتناهی است.

(۱۷۱) نمودار دو تابع $y = \frac{x-1}{x^2+x-2}$ و $y = \frac{x}{-6} + \frac{1}{4}$ در دستگاه مختصات دکارتی نقطه‌ی برخوردی ندارند.

(۱۷۲) جذر هر عدد اول عددی گنگ است.

(۱۷۳) در ۴ سوال بالا بررسی کنید که آیا می توانید هر گزاره را با روشهای دیگر، به غیر از روش خواسته شده، اثبات کنید.

- درستی گزاره های هم ارزی زیر را ثابت کنید.

(۱۷۴) عدد صحیح x عددی فرد می باشد، اگر و تنها اگر x^2 عددی فرد باشد.

(۱۷۵) سه گزاره‌ی زیر برای اعداد حقیقی متمایز x و y معادلند:

$$(۱) \quad y < x$$

$$(۲) \quad y < (x+y)/2$$

$$(۳) \quad x > (x+y)/2$$

(۱۷۶) برای اعداد حقیقی متمایز x و y ، میانگین حسابی، $(x+y)/2$ ، و میانگین هندسی، $(xy)^{1/2}$ ، برابر هستند اگر و

تنها اگر $x=y$.

(۱۷۷) یک شرط لازم و کافی برای غیرصعودی بودن تابع f در دامنه اش، این است که مشتق آن در تمام نقاط دامنه اش

منفی باشد.

– گزاره های زیر را با مثال نقض رد کنید.

(۱۷۸) برای هر عدد حقیقی مثبت x داریم، $x^3 > x^2$.

(۱۷۹) اگر عدد صحیح x بر یک عدد اول بخش پذیر باشد، آنگاه x اول نیست.

(۱۸۰) اگر عددی مضرب مشترک ۱۰ و ۱۵ باشد، آنگاه مضرب ۱۵۰ است.

(۱۸۱) عدد $2^n + 1$ برای تمام اعداد طبیعی n عددی اول است.

(۱۸۲) مجموع دو عدد گویا عددی گویاست اگر و تنها اگر هر دو عدد گویا باشند.

(۱۸۳) مجموعه ای اعداد گنگ نسبت به عمل جمع اعداد بسته است.

(۱۸۴) برای هر تابع حقیقی مثبت f تابع f^3 همواره صعودی است.

(۱۸۵) جمع هر دو تابع فرد حقیقی، تابعی زوج است.

(۱۸۶) برای هر سه تابع حقیقی f و g و h اگر $h \circ f = g \circ f$ آنگاه $g = h$.

– در هر مورد درستی استنتاج ها و استدلال ها (اثبات ها) را بررسی کنید، اشکال استدلال را در صورت وجود

بررسی کنید.

(۱۸۷) غذای خوب باید خوشمزه و مقوی باشد. غذاهای خوشمزه و مقوی زیادی وجود دارند. غذای امروز ما عیب هایی دارد. بنابراین غذای ما غذای خوبی نیست.

(۱۸۸) اگر درس بخوانید موفق می شوید مدرک بگیرید. اگر مدرک بگیرید بیکار نخواهید بود. شما پول بدست خواهید آورد یا بیکار خواهید بود. پول بدست نیاورده اید، پس درس نخوانده اید!

(۱۸۹) این شخص کتابی درباره مضرات سیگار کشیدن نوشته است. او خود سیگار می کشد، پس سیگار کشیدن ضرری ندارد!

(۱۹۰) حکم: هیچ آدم موداری (پرمویی) در جهان وجود ندارد!

اثبات (به استقرا): با استقرا روی n ثابت می کنیم کسی که n تار مو داشته باشد، مودار (پرمو) نیست.

حکم به ازای پایه استقرا درست است زیرا کسی که با یک تار مو، مودار نمی شود. حال فرض کنید هیچ آدمی با n تار مو، مودار نباشد. حال یک نفر مودار با $n+1$ تار مو را در نظر بگیرید. اگر این فرد پرمو باشد یک موی این فرد را جدا می کنیم که کچل (کم مو) نمی شود. بنابراین یک نفر آدم مودار (پرمو) با n تار مو به دست آمد و این بر خلاف فرض استقرا می باشد. پس هیچ انسانی با n تار مو، مودار نیست. در نتیجه هیچ آدم موداری (پرمویی) در جهان یافت نمی شود!

(۱۹۱) حکم: همه اسب ها هم رنگند.

اثبات (به استقرا): گام اول استقرا درست است زیرا یک اسب با خودش هم رنگ است. حال فرض کنید حکم برای n درست باشد یعنی هر n اسب هم رنگ باشند، حال $n+1$ اسب را در نظر بگیرید. می خواهیم ثابت کنیم همه این اسب ها هم رنگند.

اسب ها را از ۱ تا $n+1$ شماره گذاری کنید. حال اسب های شماره $1, 2, \dots, n-1, n+1$ را در نظر بگیرید؛ طبق فرض استقرا، تمام این اسب ها با اسب شماره یک، هم رنگند. همچنین اسب های شماره $2, \dots, n-1, n, n+1$ نیز طبق فرض استقرا هم رنگ هستند. بنابراین همه اسب های شماره ۱ تا $n+1$ با اسب شماره یک، هم رنگند؛ در نتیجه تمام $n+1$ اسب با یکدیگر هم رنگند و حکم ثابت شد!

(۱۹۲) حکم: عدد یک بزرگترین عدد صحیح است.

اثبات (به روش برهان خلف): فرض کنیم چنین نباشد. اگر n بزرگترین عدد صحیح باشد آنگاه بنا به فرض خلف $n > 1$. پس $n^2 > n \cdot 1 = n$ ، که این تناقض است، زیرا n^2 عددی صحیح است و لذا بنا به فرض باید از n کوچکتر باشد. پس فرض ابتدایی نادرست است و لذا حکم ثابت می شود!

(۱۹۳) فرض: برخی از مردان سیاستمداران دروغگو هستند.

حکم: بنابراین برخی از مردان سیاستمدار، دروغگو هستند!

(۱۹۴) فرض: اگر استرس داشته باشیم راحت خوابیم نمی برد. اگر زیاد کار نکنم راحت خوابیم می برد.

حکم: بنابراین اگر استرس داشته باشیم زیاد کار می کنم!

(۱۹۵) حکم: حد تابع f در نقطه a در صورت وجود یکتاست.

اثبات (به روش برهان خلف): فرض کنیم چنین نباشد. پس اعداد $L' \neq L$ موجودند که $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L'$. چون طرف های اول این دو تساوی یکسان هستند، پس باید طرف های دوم نیز برابر باشند. پس $L' = L$ که تناقض با فرض است. پس فرض خلف باطل است و لذا حد یکتاست.

سعی کنید با روش های ساختاری سه گزاره ی زیر را ثابت کنید.

(۱۹۶) هر معادله درجه دو به فرم $ax^2 + bx + c = 0$ که در آن $b^2 - 4ac \geq 0$ ، دست کم یک ریشه حقیقی دارد.

(۱۹۷) دست کم برای دو عدد حقیقی x معادله ی $2 \cos(2 \cos^{-1}(x)) = 1$ جواب دارد.

(۱۹۸) از یک نقطه خارج یک خط می‌توان یک خط به موازات آن رسم کرد.

فصل دوم

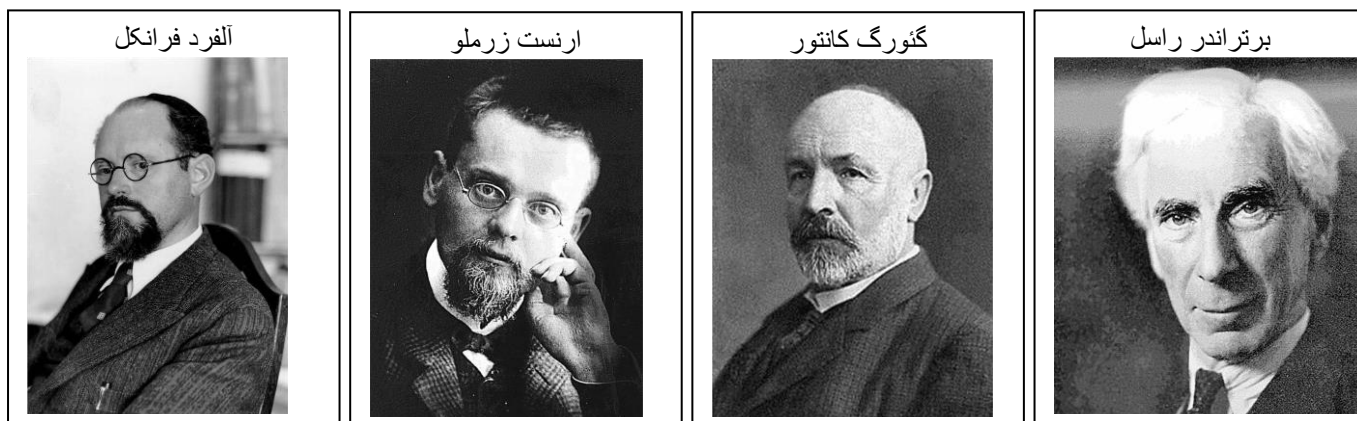
نظریه‌ی مجموعه‌ها

۱. مفاهیم اولیه: مجموعه چیست؟

اینکه مفهوم مجموعه چیست یا چه باشد یکی از چالش‌های مهم ریاضیات نوین بوده است. هنگامی که یک مفهوم در ریاضیات تعریف می‌شود، باید جمله‌ای جامع در برگیرنده‌ی تمامی مصداق‌های آن مفهوم برای آن بیان شود که به طور همزمان مانع هم باشد، یعنی مانع از این که چیزی خارج از آن مفهوم در آن جمله صدق کند (مانع نبودن به این معنا می‌تواند منجر به ایجاد تناقض با اصول منطق و قضایای دیگر نیز باشد). در اصطلاح می‌گوئیم تعریف باید جامع و مانع باشد. با این توضیحات، مجموعه یک مفهوم است که تعریفی با شرایط گفته شده و بصورت ساده برای آن ارائه نشده است. شاید تعریفی که از مجموعه شنیده باشید این باشد:

"دسته‌ای از چیزها مشخص و متمایز که دارای ویژگی مشترکی باشند."

این تعریف شهودی نوعی مترادف گویی می‌باشد که توسط "گئورگ کانتور (۱۸۴۵-۱۹۱۸)" بیان شد و البته ابهام زیادی دارد (مثلاً اینکه منظور از "دسته" و "مشخص" چیست و "ویژگی مشترک" چه نوع ویژگی می‌باشد؟). ابهاماتی که "برتراند راسل (۱۸۷۲-۱۹۷۰)" برخی از آن‌ها که منجر به ایجاد تناقض می‌شدند را معرفی نمود. اما این عبارت برای نزدیک شدن مفهوم مجموعه به ذهن و شهود مناسب است. در واقع تعریف مجموعه با توجه به اصول و کاربردهایی که برای آن انتظار داریم به مرور فهم خواهد شد. اصولی که توسط راسل و همکارش "آلفرد وایتهد (۱۸۶۱-۱۹۴۷)" و بطور تقریباً همزمان "ارنست زرمelo (۱۸۷۱-۱۹۵۳)" و "آبراهام فرانکل (۱۸۹۱-۱۹۶۵)" برای جلوگیری از ایجاد تناقض در مفاهیم نظریه مجموعه‌ها تکمیل شدند و امروزه بیشتر به نام *اصول زرمelo-فرانکل* یا به اختصار *ZF* شناخته می‌شوند.



در تعریف شهودی بالا برای مجموعه، منظور از مشخص بودن یک عنصر در یک مجموعه امکان تعیین عضویت آن در مجموعه‌ی مورد نظر می‌باشد. یکی از چیزهایی که از یک مجموعه انتظار داریم این است که بتوان تعیین کرد هر عنصر دلخواه از عالم سخن آیا عضوی از مجموعه‌ی مورد نظر می‌باشد یا خیر و در واقع با ملاک **عضویت** اشیاء آن مجموعه **مشخص** می‌شوند. همچنین ویژگی مشترک عناصر یک مجموعه، قاعده یا فرمولیست که با کمک قواعد منطق ساخته شده باشد و بیانگر ویژگی مشخصی از عناصر عالم سخن باشد. بعلاوه قرارداد می‌کنیم که در مجموعه‌ها عناصر متمایز باشند (از عناصر تکراری فقط یکی را نگه می‌داریم و بقیه را حذف می‌کنیم). با این توضیحات می‌توان اصول مورد انتظار از مفهوم مجموعه را مدون نمود که در پایان فصل آن‌ها را بیان خواهیم کرد.

۱.۲. چند مثال از مجموعه‌ها:

(۱) مجموعه حروف الف، ل، م، د از الفبای فارسی.

(۲) مجموعه تمام اعداد طبیعی.

(۳) مجموعه تمام اعداد طبیعی بین ۵ تا ۱۲۰۰.

(۴) مجموعه تمام اعداد حقیقی بین صفر و یک.

(۵) مجموعه دانشجویان کلاس مبانی ریاضی.

(۶) مجموعه دسته‌های مختلف دوستان در کلاس مبانی ریاضی.

(۷) مجموعه افراد با قد بالای سه متر در کلاس مبانی ریاضی.

(۸) مجموعه جواب‌های حقیقی معادله $x^2 + 1 = 0$.

(۹) مجموعه متشکل از مجموعه‌های نام‌های شهرستان‌های هر استان کشور.

معمولاً مجموعه‌ها را می‌توان به صورت توصیفی و یا به کمک نمادهای ریاضی معرفی کرد. گاهی هم همه عناصر یک مجموعه را بین دو آکولاد نوشته و آن‌ها را با کاما از هم جدا می‌کنیم، که به آن *نمایش تفصیلی* آن مجموعه گفته می‌شود.

مجموعه‌ها را معمولاً (اما نه همیشه!) با حروف بزرگ و عناصر آن‌ها را با حروف کوچک نمایش می‌دهیم. اگر a عضوی از مجموعه‌ی A باشد می‌نویسیم $a \in A$ و می‌خوانیم a عضو A یا متعلق به A است به و اگر a عضوی از مجموعه‌ی A نباشد می‌نویسیم $a \notin A$.

نماد $\{x \in U \mid p(x)\}$ یعنی تمامی x هایی از عالم سخن یا مجموعه‌ی مرجع U که گزاره $p(x)$ برای آن‌ها برقرار باشد. این نمایش را *نماد مجموعه‌ساز* گوئیم. هر مجموعه را می‌توان بصورت صوری و با نماد مجموعه‌ساز نمایش داد اما هر نمایشی به شکل این نماد مجموعه‌ساز لزوماً یک مجموعه نیست (تا پایان فصل این مطلب را می‌بینیم). درواقع یکی از اصول مهم نظریه مجموعه‌ها به نام *اصل تصریح* به همین می‌پردازد که چه موقع چنین نمادی یک مجموعه را خواهد ساخت. در حالت خاص مثلاً هنگامی که U خود یک مجموعه باشد و $p(x)$ فرمولی منطقی و خوش ساخت باشد، این نماد یک مجموعه را معرفی خواهد کرد.

دو مجموعه‌ی A و B را *مساوی* یا *برابر* گوئیم هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد و برعکس، و می‌نویسیم $A = B$ (یعنی همه عناصر این دو مجموعه برابر باشند). به فرم صوری داریم:

$$A = B \quad \equiv \quad \forall x (x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

درغیراین صورت این دو را *نامساوی* گوئیم و می‌نویسیم $A \neq B$ (نامساوی بودن دو مجموعه را توضیح دهید و با نماد ریاضی بنویسید).

همچنین گوئیم مجموعه‌ی A زیرمجموعه‌ی مجموعه‌ی B است، هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد و می‌نویسیم $A \subseteq B$. در این حالت همچنین گفته می‌شود، که A مشمول در B است یا B شامل (یا آبرمجموعه‌ی) A است. پس داریم:

$$A \subseteq B \quad \equiv \quad \forall x (x \in A \rightarrow x \in B)$$

همچنین اگر $A \subseteq B$ اما $A \neq B$ ، گوئیم A زیرمجموعه‌ی محض یا سره‌ی B است و می‌نویسیم $A \subset B$ یا $A \subsetneq B$ (نمایش ریاضی این تعریف را بنویسید).

بنابراین داریم:

$$A = B \iff A \subseteq B \text{ و } B \subseteq A$$

یک مجموعه می‌تواند شامل تعداد متناهی عنصر باشد که به آن مجموعه‌ی متناهی گفته می‌شود در غیر این صورت آن را یک مجموعه‌ی نامتناهی می‌گوییم (در مثال‌های بالا (۲) و (۴) نامتناهی هستند و بقیه متناهی هستند). مجموعه‌هایی مانند مثال‌های (۷) و (۸) در بالا که هیچ عنصری ندارند، مجموعه‌ی تهی یا خالی نامیده می‌شوند. می‌توان بررسی کرد که همه‌ی مجموعه‌های تهی برابر هستند، پس تنها یک مجموعه‌ی تهی وجود دارد (بررسی کنید چرا!). بنابراین همه را با یک نماد مشترک $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم.

با توجه به مطالب بالا برای تمرین بیشتر تفاوت‌های a و $\{a\}$ و در حالت خاص مجموعه‌های $\{\}$ و $\{\emptyset\}$ را با دقت بررسی کنید.

قضیه ۲.۲.۱ برای هر مجموعه‌ی دلخواه مانند A ، مجموعه‌ی تهی و خود A ، همواره زیرمجموعه‌هایی از A هستند (این دو را زیرمجموعه‌های بدیهی A گوئیم).

۲ (ویژگی تعدی یا ترایی در زیرمجموعه بودن) برای هر سه مجموعه‌ی دلخواه A و B و C ، اگر $A \subseteq B$ و $B \subseteq C$ ، آنگاه $A \subseteq C$.

اثبات (۱) واضح است که هر مجموعه زیرمجموعه‌ی خودش می‌باشد. همچنین مجموعه‌ی تهی هم که عضوی ندارد، پس به انتفاء مقدم هر عضو در هر مجموعه‌ی دیگر قرار دارد (درواقع گزاره شرطی $\forall x (x \in \emptyset \rightarrow x \in A)$ که دارای فرض نادرست است، همواره درست می‌باشد). پس مجموعه‌ی تهی هم زیرمجموعه‌ی هر مجموعه است.

۲ فرض کنید $x \in A$ عنصری دلخواه باشد. چون بنا به فرض $A \subseteq B$ ، پس طبق تعریف زیرمجموعه بودن $x \in B$. بطور مشابه چون $B \subseteq C$ ، پس $x \in C$. بنابراین از فرض $x \in A$ نتیجه شد $x \in C$. لذا طبق تعریف زیرمجموعه بودن $A \subseteq C$. ■

تعریف ۳.۲ مجموعه‌ی A را در نظر بگیرید. دسته‌ی شامل همه‌ی زیرمجموعه‌های A خود یک مجموعه تشکیل می‌دهند که به آن مجموعه‌ی توانی A می‌گوئیم و آن را با $\mathcal{P}(A)$ نمایش می‌دهیم. پس $\mathcal{P}(A)$ مجموعه‌ایست که عناصرش هممجموعه هستند:

$$\mathcal{P}(A) = \{X \mid X \subseteq A\}.$$

باتوجه به قسمت (۱) قضیه قبل همواره، $\emptyset, A \in \mathcal{P}(A)$.

۲. اعمال روی مجموعه‌ها

در این بخش برخی از اعمال مهم روی مجموعه‌ها را معرفی و بررسی می‌نمائیم.

۱.۲. اجتماع و اشتراک مجموعه‌ها

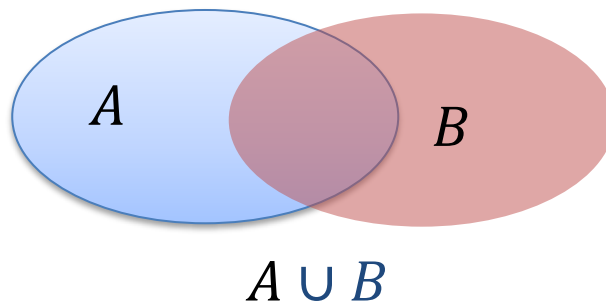
اجتماع دو یا چند مجموعه به‌طور شهودی یعنی تشکیل یک مجموعه‌ی جدید با روی هم ریختن عناصر همه آن‌ها و حذف تکرارهای عناصر. تعریف دقیق اجتماع دو مجموعه به‌صورت زیر است.

تعریف ۴.۲. اجتماع دو مجموعه‌ی A و B را با $A \cup B$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از مجموعه‌ی متشکل از **همه‌ی** اعضای که عضوی از A یا عضوی از B (یا هر دو) باشند. به‌صورت نمایش مجموعه‌ساز داریم:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

توجه کنیم که عبارت "همه‌ی اعضا" در تعریف بالا لازم است. مثلاً برای مجموعه‌های $A = \{1, 2, 4\}$ و $B = \{1, 3\}$ اعضای مجموعه‌ی $C = \{1, 2\}$ از A یا B هستند، اما **همه‌ی** چنین اعضای نیستند. در واقع 3 و 4 نیز باید در اجتماع آن‌ها، یعنی در $A \cup B = \{1, 2, 3, 4\}$ باشد.

اجتماع دو مجموعه‌ی A و B را با نموداری به‌صورت زیر، موسوم به نمودار ون، می‌توان نمایش داد. قسمت رنگ شده اجتماع این دو مجموعه است. دقت کنید که این نوع نمایش برای ایجاد شهود بهتر و به عنوان یک مثال برای نمایش مجموعه‌ها بکار می‌رود و از آن برای اثبات درستی گزاره‌ها نمی‌توان استفاده کرد.



مثال ۵.۲. در هر مورد اجتماع مجموعه‌های داده شده را بدست می‌آوریم.

$$(۱) \quad A = \{1, a, b, c\} \text{ و } B = \{1, 2, A, x\}$$

دقت کنید که عناصر باید عیناً یکسان باشند تا تکراری محسوب شوند. مثلاً در اینجا a با A تفاوت دارد. پس داریم،

$$A \cup B = \{1, 2, a, b, c, x, A\} = \{1, 2, a, b, c, x, \{1, a, b, c\}\}$$

$$(۲) \quad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 2\} \text{ و } D = \{y \in \mathbb{Z} \mid -1 < y \leq 6\}$$

دقت کنید که متغیرهای x و y ظاهری هستند و می‌توانند تغییرنام داده شوند. در واقع C مجموعه‌ی تمام اعداد صحیح بزرگتر از 2 می‌باشد و D مجموعه‌ی اعداد بین صحیح بین 0 و 6، یعنی $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. پس اجتماع آن‌ها 0 و 1 و 2 را از D و بقیه اعداد بزرگتر از 2 را از C در برخواهد داشت. پس،

$$C \cup D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$$

البته این مثال ساده‌ای بود و به‌وضوح با اطلاعات ما از این دو مجموعه پاسخ حدس زده شد. اما در واقع این یک حدس است و باید به کمک تعریف اجتماع، تساوی بالا ثابت شود که این اثبات را به شما واگذار می‌کنیم. هم‌چنین این مثال را در حالتی که عناصر دو مجموعه C و D از مجموعه‌ی اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ ، به جای $\mathbb{Z}$ انتخاب شوند، مجدداً بررسی نمائید.

قضیه ۶.۲ (خواص اجتماع مجموعه‌ها). اگر A و B و C و D مجموعه باشند و M مجموعه‌ی مرجع باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند.

$$(۱) \quad A \cup A = A \quad (\text{خاصیت خودتوانی اجتماع})$$

$$(۲) \quad A \cup B = B \cup A \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی اجتماع})$$

$$(۳) \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (\text{خاصیت شرکت‌پذیری اجتماع})$$

$$(۴) \quad A \cup \emptyset = A. \quad (\text{خاصیت مجموعه‌ی بی اثر اجتماع})$$

$$(۵) \quad A \cup M = M \quad (\text{خاصیت مجموعه‌ی مرجع اجتماع})$$

$$(۶) \quad B \subseteq A \cup B \quad \text{و} \quad A \subseteq A \cup B$$

$$(۷) \quad \text{اگر } A \subseteq C \text{ و } B \subseteq C \text{ آنگاه } A \cup B \subseteq C$$

(با توجه به این گزاره و قسمت (۶) اجتماع دو مجموعه کوچکترین مجموعه‌ی شامل هر دوی آن مجموعه‌هاست).

$$(۸) \quad B = A \cup B \quad \text{اگر و تنها اگر } A \subseteq B$$

$$(۹) \quad \text{اگر } A \subseteq C \text{ و } B \subseteq D \text{ آنگاه } A \cup B \subseteq C \cup D$$

اثبات. اثبات همه قسمت‌ها با عضوگیری و به‌طور مستقیم به کمک قواعد ترکیب فصلی که در فصل قبل گفته شده، قابل انجام است. قسمت‌های (۷) و (۸) را ثابت می‌کنیم، بقیه قسمت‌ها به‌طور مشابه ثابت می‌شوند که به شما واگذار می‌شود (حتماً بررسی نمائید!).

(۷) فرض کنید $A \subseteq C$ و $B \subseteq C$. برای اثبات $A \cup B \subseteq C$ فرض کنید $x \in A \cup B$. بنابه تعریف اجتماع $x \in A$ یا $x \in B$. پس بنابه فرض در هر حالت $x \in C$ ، بنابراین، $A \cup B \subseteq C$.

(۸) ابتدا فرض کنید $A \subseteq B$. بنا به قسمت (۶)، $B \subseteq A \cup B$. پس برای اثبات تساوی کافی است ثابت کنیم $A \cup B \subseteq A$. اگر $x \in A \cup B$ ، آنگاه بنابه تعریف اجتماع $x \in A$ یا $x \in B$. اگر $x \in B$ آن‌چه می‌خواهیم ثابت می‌شود و اگر $x \in A$ ، آنگاه بنا به فرض $A \subseteq B$ ، باز هم داریم $x \in B$ و در این حالت هم حکم برقرار است.

برعکس فرض کنید $B = A \cup B$ ، آنگاه بوضوح بنا به قسمت (۶) داریم، $A \subseteq A \cup B = B$ ، و لذا حکم ثابت می‌شود. ■

به عنوان تمرین بیشتر، برای هر مورد از ویژگی‌های اجتماع در قضیه بالا یک مثال بزنید و درستی یا نادرستی عکس گزاره‌های شرطی یک طرفه را نیز بررسی کنید.

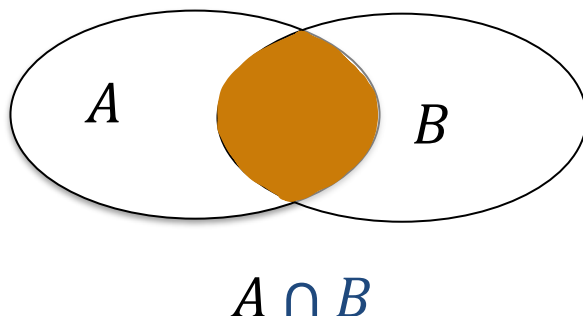
اشتراک دو یا چند مجموعه به‌طور شهودی یعنی تشکیل یک مجموعه‌ی جدید از عناصری که در هر دو مجموعه مورد نظر باشند. تعریف دقیق اشتراک دو مجموعه بصورت زیر است.

تعریف ۷.۲. اجتماع دو مجموعه‌ی A و B را با $A \cap B$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از **مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی اعضای که عضوی از A و عضوی از B (یعنی هردو با هم) باشند.** به‌صورت نمایش مجموعه‌ساز داریم:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

توجه کنیم که عبارت "همه‌ی اعضا" در تعریف بالا لازم است. مثلاً برای مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{1, 2, 3\}$ اعضای مجموعه‌ی $C = \{1, 2\}$ در هر دوی A و B هستند، اما همه‌ی چنین اعضایی نیستند. در واقع 3 نیز باید در اشتراک آن‌ها، یعنی در $A \cap B = \{1, 2, 3\}$ باشد.

نمودار ون برای اشتراک دو مجموعه‌ی A و B ، بصورت زیر است. قسمت رنگ شده اشتراک این دو مجموعه می‌باشد.



همچنین دو مجموعه را /زهم جدا/ یا مجزا گوئیم هرگاه هیچ عضو مشترکی نداشته باشند، یعنی، $A \cap B = \emptyset$ (دقت کنید که بین واژه‌های متمایز و مجزا تفاوت وجود دارد. در واقع دو مجموعه‌ی متمایز (نامساوی) ممکن است مجزا نباشند، یعنی عضو مشترکی داشته باشند، اما هر دو مجموعه‌ی مجزا حتماً متمایز هم هستند.)

مثال ۲.۸. در هر مورد اشتراک مجموعه‌های داده شده را بدست می‌آوریم.

$$(۱) \quad A = \{1, 2, a, b, c\} \text{ و } B = \{\{1, 2, a\}, A, x, 1\}$$

دقت کنید که عناصر باید عیناً یکسان باشند تا تکراری محسوب شوند. مثلاً در اینجا a با A یا $\{1, 2, a\}$ با عناصر 1 و 2 تفاوت دارد. پس داریم، $A \cap B = \{1\}$

$$(۲) \quad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 2\} \text{ و } D = \{y \in \mathbb{Z} \mid -1 < y \leq 6\}$$

دقت کنید که متغیرهای x و y ظاهری هستند و می‌توانند تغییرنام داده شوند. در واقع C مجموعه‌ی تمام اعداد صحیح بزرگتر از 2 می‌باشد و D مجموعه‌ی اعداد بین صحیح بین 0 و 6، یعنی $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است. پس اشتراک همه‌ی اعدادی که هم بزرگتر از 2 باشند و هم در مجموعه‌ی D را خواهد داشت. پس، $C \cap D = \{3, 4, 5, 6\}$.

مانند همیشه، درستی پاسخ این مثال که با اطلاعات ما از این دو مجموعه حدس زده شد، باید اثبات گردد که آن‌را به شما واگذار می‌کنیم. همچنین این مثال را در حالتی که عناصر دو مجموعه C و D از مجموعه‌ی اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ ، به جای $\mathbb{Z}$ انتخاب شوند، مجدداً بررسی نمائید.

قضیه ۲.۹ (خواص اشتراک مجموعه‌ها). اگر A و B و C و D مجموعه باشند و M مجموعه‌ی مرجع باشد، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند.

$$(۱) \quad A \cap A = A \quad (\text{خاصیت خودتوانی اشتراک})$$

$$(۲) \quad A \cap B = B \cap A \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی اشتراک})$$

$$(۳) \quad A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (\text{خاصیت شرکت پذیری اشتراک})$$

$$(۴) \quad A \cap M = A. \quad (\text{خاصیت مجموعه‌ی بی اثر اشتراک})$$

$$(۵) \quad A \cap \emptyset = \emptyset \quad (\text{اثر مجموعه‌ی تهی بر اشتراک})$$

$$(۶) \quad A \cap B \subseteq B \quad \text{و} \quad A \cap B \subseteq A$$

$$(۷) \quad \text{اگر } C \subseteq A \text{ و } C \subseteq B \text{ آنگاه } C \subseteq A \cap B$$

(با توجه به این گزاره و قسمت (۶) اشتراک دو مجموعه بزرگترین مجموعه‌ی مشمول در هر دوی آن مجموعه-هاست).

$$(۸) \quad A \subseteq B \text{ اگر و تنها اگر } A = A \cap B$$

$$(۹) \quad \text{اگر } A \subseteq C \text{ و } B \subseteq D \text{ آنگاه } A \cap B \subseteq C \cap D$$

اثبات. اثبات همه قسمت‌ها با عضوگیری و به‌طور مستقیم به کمک قواعد ترکیب عطفی که در فصل قبل گفته شده، قابل انجام است (حتماً بررسی نمائید!).

به عنوان تمرین، برای هر مورد از ویژگی‌های گفته شده در قضیه بالا یک مثال بزنید و درستی یا نادرستی عکس گزاره-های شرطی یک طرفه را نیز بررسی کنید.

قضیه ۱۰.۲. اگر A و B و C سه مجموعه باشند، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند.

$$(۱) \quad (\text{خاصیت‌های جذبی})$$

$$A \cup (A \cap B) = A$$

$$A \cap (A \cup B) = A$$

$$(۲) \quad (\text{خاصیت‌های توزیع پذیری یا پخشی})$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

اثبات. به کمک تعاریف و قواعد مشابه منطقی ترکیب‌های عطفی و فصلی ساده می‌باشد.

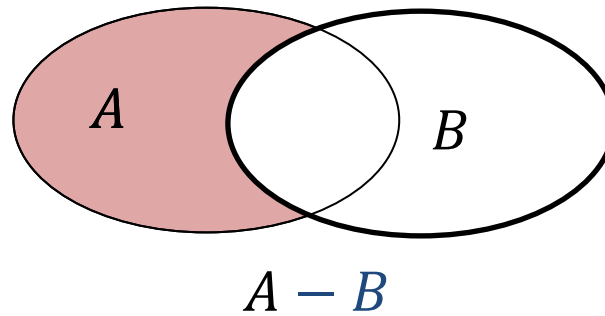
برای تمرین سعی کنید خاصیت دوم پخشی (پخشی اشتراک روی اجتماع) را به کمک خاصیت اول پخشی (اجتماع روی اشتراک) و خواص دیگر اثبات شده در بالا ثابت کنید (راهنمایی: از طرف دوم تساوی، $(A \cap B)$ را روی $(A \cap C)$ به کمک خاصیت پخشی اجتماع روی اشتراک پخش کنید).

۲.۲. تفاضل‌ها و متمم مجموعه‌ها

تعریف ۱۱.۲. (تفاضل مجموعه‌ها). برای هر دو مجموعه‌ی A و B ، مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی عناصر A که در B نباشند، را با $A - B$ یا $A \setminus B$ نمایش می‌دهیم و تفاضل B از A یا متمم B نسبت به A می‌نامیم:

$$A - B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

نمایش نمودار ون برای تفاضل B از A قسمت رنگ شده به صورت زیر است:



در حالت خاص اگر $A = M$ مجموعه‌ی مرجع باشد، متمم هر مجموعه مانند B نسبت به آن را با B' یا B^c نمایش می‌دهیم و متمم B می‌نامیم.

مثال ۱۲.۲. برای هر دو مجموعه‌ی داده شده تفاضل هر یک از دیگری را بیابید.

$$(۱) \quad A = \{1, 2, a, b, c, \{1, 2\}\} \text{ و } B = \{\{1, 2, a\}, A, x, c, 1\}$$

برای یافتن $A - B$ عناصر A را نوشته و سپس عناصر B را از آن حذف می‌کنیم (عناصر باید عیناً ظاهر شده باشند):

$$A - B = \{2, a, b, \{1, 2\}\}$$

$$B - A = \{\{1, 2, a\}, A, x\}$$

$$(۲) \quad C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 2\} \text{ و } D = \{y \in \mathbb{Z} \mid -1 < y \leq 6\}$$

مشابه آن چه در اجتماع و اشتراک گفته شد، متغیرهای x و y ظاهری هستند و می‌توانند تغییر نام داده شوند. چون C مجموعه‌ی تمام اعداد صحیح بزرگتر از ۲ است، $C - D$ متشکل است از همه‌ی اعدادی که بزرگتر از ۲ باشند اما در مجموعه‌ی $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ نباشند. پس،

$$C - D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 2 \wedge x \notin \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}\} = \{7, 8, 9, \dots\}$$

هم‌چنین:

$$D - C = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \wedge x \leq 2\} = \{0, 1, 2\}$$

مانند قبل، در بالا پاسخ‌ها حدس زده شدند و باید تساوی‌ها اثبات گردند که آن را به شما واگذار می‌کنیم. هم‌چنین این مثال را در حالتی که عناصر دو مجموعه C و D از مجموعه‌ی اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ ، به جای $\mathbb{Z}$ انتخاب شوند، مجدداً بررسی نمائید.

با توجه به مثال‌های بالا می‌توان فهمید که تفاضل مجموعه‌ها ویژگی جابه‌جایی را ندارد. در قضیه بعد برخی از ویژگی‌های مهم تفاضل مجموعه‌ها را می‌بینیم.

قضیه ۱۳.۲ (خواص تفاضل مجموعه‌ها). اگر A و B مجموعه باشند، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند.

$$A - A = \emptyset \quad (۱)$$

$$A - B = A - (B \cap A) \quad (۲)$$

$$(A - B) \cap (B - A) = \emptyset \quad (۳)$$

$$(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B) \quad (۴)$$

$$A \cup B = (A - B) \cup (A \cap B) \cup (B - A) \quad (۵)$$

$$B = A \cup (B - A) \text{ آنگاه } A \subseteq B \quad (۶)$$

اثبات. با عضوگیری تمامی قسمت‌ها براحتی قابل اثبات است.

با کمک قضیه بالا برای متمم به عنوان حالت خاصی از تفاضل مجموعه‌ها قضیه زیر را داریم.

قضیه ۱۴.۲ (خواص متمم مجموعه‌ها). اگر A و B دو مجموعه دلخواه باشند و M مجموعه مرجع باشد، آن‌گاه گزاره‌های زیر برقرارند.

$$\emptyset^c = M \text{ و } M^c = \emptyset \quad (۱)$$

$$(A^c)^c = A \quad (۲)$$

$$B^c \subseteq A^c \text{ اگر و تنها اگر } A \subseteq B \quad (۳)$$

$$A - B = A \cap B^c \quad (۴)$$

$$A \cap A^c = \emptyset \quad (۵)$$

$$B \subseteq A^c \text{ آنگاه } A \cap B = \emptyset \quad (۶)$$

از (۵) و (۶) نتیجه می‌شود که A^c بزرگترین مجموعه می‌باشد که با A اشتراکی ندارد.

$$A \cup A^c = M \quad (۷)$$

$$A^c \subseteq B \text{ آنگاه } A \cup B = M \quad (۸)$$

از (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که A^c کوچکترین مجموعه است که اجتماعش با A برابر مجموعه مرجع می‌باشد.

$$A^c \text{ با شرایط (۵) و (۶) یکتاست.} \quad (۹)$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c \text{ و } (A \cup B)^c = A^c \cap B^c \text{ (قوانین دِمرگان)} \quad (۱۰)$$

اثبات. گزاره‌های (۹) و یک قسمت از (۱۰) را ثابت می‌کنیم. اثبات بقیه‌ی قسمت‌ها با عضوگیری و تعریف ساده می‌باشد و به عنوان تمرین به شما واگذار می‌گردد.

(۹) فرض کنید D مجموعه‌ای با شرایط $A \cap D = \emptyset$ و $A \cup D = M$ باشد. نشان می‌دهیم این مجموعه باید با A^c برابر باشد. اگر $x \in D$ چون $A \cap D = \emptyset$ داریم، $x \notin A$ پس بنابه تعریف باید $x \in A^c$ و بنابراین $D \subseteq A^c$. همچنین اگر $x \in A^c$ آنگاه $x \notin A$ و $x \in M$ که چون $A \cup D = M$ لذا باید $x \in D$ پس $A^c \subseteq D$ و لذا $D = A^c$.

(۱۰) تساوی $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ را با عضوگیری ثابت می‌کنیم. مراحل اثبات را بصورت خلاصه و با نمادهای ریاضی می‌نویسیم. البته همان‌گونه که در فصل قبل گفتیم، این‌گونه نوشتن از نظر منطق ریاضی چندان صحیح نمی‌باشد،

اما با قرارداد ما مبنی بر اولویت انجام عملیات‌ها از سمت چپ (دست‌کم در این کتاب) می‌توانیم از این روش خلاصه نویسی (با شرط عدم ایجاد ابهام) استفاده کنیم.

$$x \in (A \cup B)^c$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف متمم}} x \notin A \cup B$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} \sim (x \in A \vee x \in B)$$

$$\xLeftrightarrow{\vee \text{قاعده نقیض}} x \notin A \wedge x \notin B$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف متمم}} x \in A^c \wedge x \in B^c$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} x \in A^c \cap B^c.$$



اگر عمل اجتماع مجموعه‌ها نمایش دهنده ترکیب گزاره‌های عضویت با "یا" باشد، تفاضل متقارن مجموعه‌ها که به صورت زیر تعریف می‌شود، ترکیب گزاره‌های عضویت با "یا ی مانع جمع" است.

تعریف ۱۵.۲ (تفاضل متقارن مجموعه‌ها). برای هر دو مجموعه‌ی A و B ، تفاضل متقارن آن‌ها مجموعه‌ی متشکل از همه‌ی عناصری است که یا در A هستند و یا در B و نه در هر دو. تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B را با $A \Delta B$ نمایش می‌دهیم. باتوجه به تعریف داریم:

$$A \Delta B =$$

(مجموعه‌ی همه‌ی عناصری که در هر دوی A و B هستند) – (مجموعه‌ی همه‌ی عناصری که یا در A هستند یا در B)

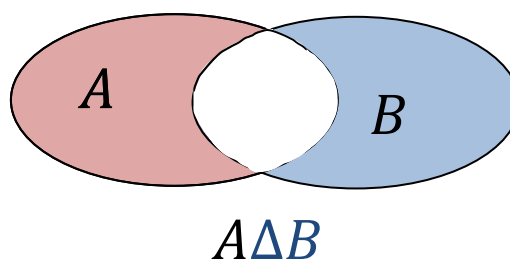
یعنی،

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$$

که با توجه به قسمت (۴) از قضیه ۱۳.۲ داریم:

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$$

که این دلیلی بر بکار بردن کلمه‌ی "متقارن" در تعریف این عمل می‌باشد. نمایش ون برای تفاضل متقارن مجموعه‌های A و B نیز قسمت رنگ شده به صورت زیر است:



مثال ۱۶.۲. برای دو مجموعه‌ی داده شده تفاضل متقارن $A \Delta B$ را بیابید.

$$(۱) \quad B = \{\{1, 2, a\}, A, x, c, 1\} \text{ و } A = \{1, 2, a, b, c, \{1, 2\}\}$$

بنا به مثال ۱۲.۲ داریم:

$$A - B = \{2, a, b, \{1, 2\}\}$$

$$B - A = \{\{1, 2, a\}, A, x\}$$

پس بنابر توضیحات بالا

$$\begin{aligned} A \Delta B &= (A - B) \cup (B - A) = \{2, a, b, \{1, 2\}\} \cup \{\{1, 2, a\}, A, x\} \\ &= \{2, a, b, \{1, 2\}, \{1, 2, a\}, A, x\} \end{aligned}$$

$$(۲) \quad A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x > 2\} \text{ و } B = \{y \in \mathbb{Z} \mid -1 < y \leq 6\}$$

طبق مثال‌های ۲.۵ (۲) و ۲.۸ (۲) داریم،

$$A \cup B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq 0\}$$

$$A \cap B = \{3, 4, 5, 6\}$$

پس بنا به تعریف:

$$A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B) = \{0, 1, 2, 7, 8, 9, 10, \dots\}$$

قضیه ۱۷.۲ (خواص تفاضل متقارن مجموعه‌ها). اگر A و B و C سه مجموعه باشند، آنگاه گزاره‌های زیر برقرارند.

$$(۱) \quad A \Delta \emptyset = A$$

$$(۲) \quad A \Delta A = \emptyset$$

$$(۳) \quad A \Delta B = B \Delta A \quad (\text{خاصیت جابه‌جایی})$$

$$(۴) \quad A \Delta (B \Delta C) = (A \Delta B) \Delta C \quad (\text{خاصیت شرکت‌پذیری})$$

$$(۵) \quad A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C) \quad (\text{خاصیت پخش‌ی اشتراک روی تفاضل متقارن})$$

اثبات. خاصیت (۵) را ثابت می‌کنیم. اثبات بقیه قسمت‌ها با کمک تعریف و قضایای قبلی ساده است. اثبات‌های آن‌ها را بررسی کنید. همچنین تلاش نمائید تا تساوی (۵) را نیز به کمک عضوگیری ثابت کنید.

اثبات (۵). با شروع از سمت راست تساوی داریم:

$$\text{سمت راست تساوی} = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$$

$$\stackrel{\text{تعریف تفاضل متقارن}}{=} ((A \cap B) - (A \cap C)) \cup ((A \cap C) - (A \cap B))$$

$$\stackrel{\text{قضیه خواص تفاضل}}{=} ((A \cap B) \cap (A \cap C)^c) \cup ((A \cap C) \cap (A \cap B)^c)$$

$$\begin{aligned}
& \text{قوانین دمورگان} \\
& \underline{\underline{((A \cap B) \cap (A^c \cup C^c)) \cup ((A \cap C) \cap (A^c \cup B^c))}} \\
& \text{خاصیت پخشی اشتراک بر اجتماع} \\
& \underline{\underline{((A \cap B) \cap A^c) \cup ((A \cap B) \cap C^c) \cup ((A \cap C) \cap A^c) \cup ((A \cap C) \cap B^c)}} \\
& \text{خاصیت جابه‌جایی اشتراک} \\
& \underline{\underline{((A \cap A^c) \cap B) \cup ((A \cap B) \cap C^c) \cup ((A \cap A^c) \cap C) \cup ((A \cap C) \cap B^c)}} \\
& \text{قضیه خواص متمم} \\
& \underline{\underline{(\emptyset \cup ((A \cap B) \cap C^c)) \cup (\emptyset \cup ((A \cap C) \cap B^c))}} \\
& \text{خاصیت عضو بی اثر اجتماع} \\
& \underline{\underline{(A \cap B) \cap C^c \cup (A \cap C) \cap B^c}} \\
& \text{خاصیت شرکت‌پذیری اشتراک} \\
& \underline{\underline{A \cap (B \cap C^c) \cup A \cap (C \cap B^c)}} \\
& \text{خاصیت پخشی اشتراک بر اجتماع} \\
& \underline{\underline{A \cap ((B \cap C^c) \cup (C \cap B^c))}} \\
& \text{خواص تفاضل} \\
& \underline{\underline{A \cap ((B - C) \cup (C - B))}} \\
& \text{تعریف تفاضل متقارن} \\
& \underline{\underline{A \cap (B \Delta C) = \text{سمت چپ تساوی}}} \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

۳.۲. اجتماع و اشتراک تعداد دلخواه از مجموعه‌ها

منظور از یک خانواده از اشیاء مجموعه‌ای از اشیاء است که شرط غیر تکراری بودن را برای آن‌ها در نظر نگیریم. معمولاً یک خانواده از اشیاء را می‌توان با یک مجموعه از نام‌ها (اندیس‌ها) نامگذاری (اندیس‌گذاری) کرد (حتی می‌توان به هر یک از اشیاء مشابه اندیس متفاوتی داد و در صورت لزوم موقتاً آن‌ها را به عنوان اشیاء متفاوت در نظر گرفت). مثلاً اشیاء خانواده‌ی

$$\mathcal{F} = \{a, b, c, a, b, a\}$$

را می‌توان به صورت زیر نامگذاری کرد:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \quad x_3 = c, \quad x_4 = a, \quad x_5 = b, \quad x_6 = a$$

و خانواده‌ی متشکل از این عناصر را به طور خلاصه به صورت $\mathcal{F} = \{x_i\}_{i \in \{1,2,3,4,5,6\}}$ نوشت.

همه‌ی قواعد گفته شده برای اجتماع و اشتراک دو مجموعه برای تعداد متناهی از مجموعه‌ها به طور مشابه قابل بیان و به کمک استقرا قابل اثبات هستند. اما برای یک خانواده دلخواه از مجموعه‌ها (که با یک مجموعه اندیس‌گذاری شده‌اند) تعاریف بصورت زیر بیان می‌شوند و می‌توان خواص اجتماع و اشتراک را با این تعاریف برای تعداد دلخواه از مجموعه‌ها مجدداً بررسی کرد.

فرض کنید $\mathcal{I}$ یک مجموعه از نام‌ها (اندیس‌ها) و $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ یک خانواده متشکل از مجموعه‌ها باشد که توسط عناصر $\mathcal{I}$ نام‌گذاری (اندیس‌گذاری) شده‌اند. در این صورت اجتماع مجموعه‌های این خانواده را با $\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ یا $\bigcup \mathcal{F}$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از تمامی عناصری که در حداقل یکی از A_i ها (برای حداقل یک $i \in \mathcal{I}$) قرار داشته باشند، یعنی،

$$\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{a \mid \exists i \in \mathcal{I}; a \in A_i\}$$

اگر عناصر خانواده $\mathcal{F} = \{A\}$ از مجموعه‌ها اندیس‌گذاری نشده باشند، اجتماع آن‌ها را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{A \in \mathcal{F}} A = \{a \mid \exists A \in \mathcal{F}; a \in A\}$$

همچنین اگر تعداد مجموعه‌های موجود در خانواده‌ی $\mathcal{F}$ متناهی باشد و با A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n نام‌گذاری شده باشند آن‌گاه،

$$\bigcup \mathcal{F} = \bigcup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n$$

به طور مشابه اشتراک از خانواده‌ی $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ از مجموعه‌ها (که توسط عناصر $\mathcal{I}$ اندیس‌گذاری شده‌اند)، را با $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i$ یا $\bigcap \mathcal{F}$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از تمامی عناصری که در همه‌ی A_i ها (برای هر $i \in \mathcal{I}$) قرار داشته باشند، یعنی،

$$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{a \mid \forall i \in \mathcal{I}; a \in A_i\}$$

اگر عناصر خانواده $\mathcal{F} = \{A\}$ از مجموعه‌ها اندیس‌گذاری نشده باشند، اشتراک آن‌ها را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{A \in \mathcal{F}} A = \{a \mid \forall A \in \mathcal{F}; a \in A\}$$

همچنین اگر تعداد مجموعه‌های موجود در خانواده‌ی $\mathcal{F}$ متناهی باشد و با A_1 و A_2 و A_3 و ... و A_n نام‌گذاری شده باشند آن‌گاه،

$$\bigcap \mathcal{F} = \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n$$

مثال ۱۸.۲. اجتماع و اشتراک روی هر یک از خانواده‌های داده شده از بازه‌های اعداد حقیقی را بیابید.

$$\mathcal{F}_1 = \left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n=1,2,3,\dots,100}$$

$$\mathcal{F}_2 = \left\{ \left(0, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

$$\mathcal{F}_3 = \left\{ \left[0, \frac{1}{n} \right) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$$

حل.

$$\bigcup \mathcal{F}_1 = \bigcup_{n=1}^{100} \left(0, \frac{1}{n}\right) = (0, 1) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right) \cup \dots \cup \left(0, \frac{1}{100}\right)$$

اجتماع تعداد متناهی بازه از اعداد حقیقی را داریم که با افزایش مقدار n ، بازه‌ها کوچکتر می‌شوند. بنابراین اجتماع همه‌ی آن‌ها (که زیرمجموعه‌ی $(0, 1)$ هم هستند) برابر $(0, 1)$ می‌باشد. البته این حدس ماست که اگرچه به نظر صحیح می‌آید اما باید به‌صورت دقیق‌تر ثابت شود. پس به کمک تعریف‌ها داریم:

$$x \in (0, 1) \Rightarrow x \in \bigcup_{n=1}^{100} \left(0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow (0, 1) \subseteq \bigcup_{n=1}^{100} \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

برعکس،

$$x \in \bigcup_{n=1}^{100} \left(0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \quad n \in \{1, 2, \dots, 100\} \Rightarrow x \in (0, 1)$$

که استلزام آخر به این دلیل برقرار است که برای هر $n \in \{1, 2, \dots, 100\}$ داریم، $\left(0, \frac{1}{n}\right) \subseteq (0, 1)$.

پس $(0, 1) \supseteq \bigcup_{n=1}^{100} \left(0, \frac{1}{n}\right)$ ، و لذا تساوی برقرار است.

به‌طور مشابه برای اشتراک این خانواده حدس می‌زنیم، کوچکترین بازه یعنی، $\left(0, \frac{1}{100}\right)$ باشد (زیرا این بازه زیرمجموعه‌ی همه‌ی بازه‌های دیگر در این خانواده است و لذا در اشتراک آن‌هاست). اکنون این ادعا را ثابت می‌کنیم. بطور خلاصه داریم:

$$x \in \left(0, \frac{1}{100}\right) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \quad \text{برای هر } n \geq 99 \quad \left(\left(0, \frac{1}{100}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{n}\right)\right) \quad (\text{زیرا})$$

$$\Rightarrow x \in \bigcap_{n=1}^{100} \left(0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow \left(0, \frac{1}{100}\right) \subseteq \bigcap_{n=1}^{100} \left(0, \frac{1}{n}\right)$$

برعکس، اشتراک هر تعداد مجموعه زیرمجموعه‌ای از تک‌تک آن‌هاست، در این‌جا،

$$x \in \bigcap_{n=1}^{100} \left(0, \frac{1}{n}\right) \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) \quad \text{برای هر } n \in \{1, 2, \dots, 100\} \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{100}\right)$$

پس $\bigcap_{n=1}^{100} \left(0, \frac{1}{n}\right) \subseteq \left(0, \frac{1}{100}\right)$ و لذا تساوی برقرار است، یعنی، $\bigcap \mathcal{F}_1 = \left(0, \frac{1}{100}\right)$.

با روشی مشابه بالا می‌توان اثبات کرد که ادعاهای زیر درست هستند (آن‌ها را بررسی کنید):

$$\bigcup \mathcal{F}_2 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = (0, 1)$$

$$\bigcup \mathcal{F}_3 = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right) = [0, 1)$$

همچنین چون با افزایش $n \in \mathbb{N}$ مقدار $\frac{1}{n}$ به صفر میل می‌کند پس بازه‌ها کوچک‌تر شده و به بازه‌ی خالی نزدیک می‌شوند، پس حدس می‌زنیم،

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_2 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right) = \emptyset$$

برای اثبات این حدس دقت کنید که اگر $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$ آن‌گاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x \in \left(0, \frac{1}{n}\right)$ ، یعنی، $0 < x < \frac{1}{n}$ ، اما از طرفی بنا به خاصیت ارشمیدسی اعداد (تمرین ۱۱۲ از فصل اول را ببینید) برای هر عدد مثبت مانند x عدد طبیعی مثل k وجود دارد که $kx > 1$ ، یعنی $\frac{1}{k} < x$ ، پس برای دست‌کم یک مقدار k ، عدد x در بازه‌ی $\left(0, \frac{1}{k}\right)$ قرار ندارد که تناقض است. پس $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left(0, \frac{1}{n}\right)$ عضوی ندارد.

اما در خانواده‌ی $\mathcal{F}_3$ عدد ۰ در همه‌ی بازه‌ها قرار دارد و با بزرگ شدن مقدار $n \in \mathbb{N}$ بازه‌ها به تک عضوی $\{0\}$ نزدیک می‌شوند، پس مشابه بالا می‌توان ثابت کرد:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{F}_3 = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \left[0, \frac{1}{n}\right) = \{0\}.$$

همان‌گونه که اشاره شد خواص اجتماع و اشتراک دو مجموعه قابل تسری به یک خانواده‌ی دل‌خواه از مجموعه‌هاست. به‌ویژه داریم:

قضیه ۱۹.۲. فرض کنید U مجموعه‌ی مرجع، B و $\mathcal{I}$ دو مجموعه و $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ یک خانواده متشکل از مجموعه‌ها باشند. در این صورت داریم:

$$(۱) \quad B \cup \left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} (B \cup A_i) \quad \text{و} \quad B \cap \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right) = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} (B \cap A_i) \quad (\text{قواعد پخشی})$$

$$(۲) \quad \left(\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i\right)^c = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i^c \quad \text{و} \quad \left(\bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i\right)^c = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i^c \quad (\text{قواعد دمرگان})$$

$$(۳) \quad \text{اگر } \mathcal{I} = \emptyset \text{ (یعنی خانواده تهی باشد)، آن‌گاه } \bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset \text{ و } \bigcap_{i \in \emptyset} A_i = U$$

اثبات. تمرین.

۴.۲. حاصل ضرب دکارتی مجموعه‌ها

گاهی ترتیب قرار گرفتن دو عنصر در مجموعه‌ها برای ما مهم است. اما همان‌طور که خواص مجموعه فهمیدیم ترتیب در میان عناصر یک مجموعه اهمیتی ندارد. پس به دنبال نوشتن دوتایی‌ها به کمک مجموعه‌ها هستیم به‌گونه‌ای که ترتیب را هم بتوان مشخص کرد. اگر این دو عنصر را مثلاً با پرانتز به‌صورت (a, b) نمایش دهیم انتظار داریم $(a, b) \neq (b, a)$. پس آن‌چه که از نمایش مرتب دو عنصر انتظار داریم این است که $(a, b) = (c, d)$ اگر و تنها اگر $a = c$ و $b = d$. این نمایش از دو عنصر که ترتیب آن‌ها با توجه به شرط تساوی گفته شده به‌صورت یکتا مشخص می‌شود را زوج یا دوتایی مرتب می‌گوئیم. در (a, b) عنصر a را مؤلفه‌ی اول و b را مؤلفه‌ی دوم دوتایی می‌گوئیم. پس (a, b) نمادی کمکی برای نمایش $\{a, b\}$ است که ترتیب عناصر را نیز به کمک آن مشخص کرده‌ایم، اگرچه در ادامه می‌خواهیم نمادی برای آن به‌صورت یک مجموعه بسازیم.

تلاش‌های زیادی برای بیان تعریف زوج مرتب به کمک مجموعه‌ها انجام شد و تعاریف مختلفی برای آن بیان گردید که همگی ویژگی بالا برای تساوی دو زوج مرتب را دارند. دو تا از مشهورترین آن‌ها به صورت زیر می‌باشند.

اولین تعریف را "وینر" در ۱۹۱۴ بصورت زیر ارائه داد:

$$(x, y) = \{\{\{x\}, \emptyset\}, \{\{y\}\}\}$$

این تعریف اگرچه صحیح بود و خاصیت مورد نیاز برای تساوی زوج مرتب‌ها را برآورده می‌کرد، اما به کارگیری آن ساده نیست. در ۱۹۲۱ "کوراتوفسکی" تعریف ساده‌تری از زوج مرتب ارائه داد که به صورت زیر است و در متون بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد.

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

قضیه ۲.۲۰. با تعریف کوراتوفسکی بیان شده در بالا برای زوج‌های مرتب، $(x, y) = (u, v)$ اگر و تنها اگر $x = u$ و $y = v$.

اثبات. فرض کنید $(x, y) = (u, v)$. بنابه تعریف، $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{u\}, \{u, v\}\}$. از تساوی مجموعه‌ها

$$\{u\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\} \quad \text{و} \quad \{u, v\} \in \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

بنابراین حالات زیر نتیجه می‌شوند:

$$۱) \{u\} = \{x\} \quad \text{یا} \quad ۲) \{u\} = \{x, y\}$$

و

$$۳) \{u, v\} = \{x\} \quad \text{یا} \quad ۴) \{u, v\} = \{x, y\}$$

اگر از سطر اول حالات بالا (۲) برقرار باشد، پس داریم $u = x = y$. اکنون اگر از سطر دوم (۳) برقرار باشد، $u = v = x$ که نتیجه می‌دهد $u = x = y = v$ و اگر (۴) برقرار باشد، چون $u = x = y = v$ ، $u = x = y = v$.

اگر از سطر اول حالات بالا (۱) برقرار باشد، $u = x$. اگر از سطر دوم (۳) درست بود، باید $u = v$ و بنا به تساوی دو مجموعه‌ی

$$\{x\} = \{x, y\} \quad \text{که نتیجه می‌دهد} \quad u = x = y = v$$

اکنون اگر از سطر اول حالات بالا (۱) و از سطر دوم (۴) برقرار باشد، داریم $u = x$ و دو حالت وجود دارد؛ $v = y$ که حکم نتیجه می‌شود، یا $v = x$ که نتیجه می‌دهد، $u = x = y = v$. ■

اکنون می‌توانیم مجموعه‌های شامل زوج‌های مرتب را به عنوان مجموعه‌هایی متشکل از مجموعه‌ها به کار ببریم. یکی از مهمترین ابزارهای ریاضی گردایه‌ی متشکل از همه‌ی زوج‌های مرتب است که مولفه‌های آن‌ها از مجموعه‌ها انتخاب شوند. این گردایه در واقع خصوصیات مجموعه‌ها را داراست و می‌توان ثابت کرد که خود یک مجموعه می‌باشد.

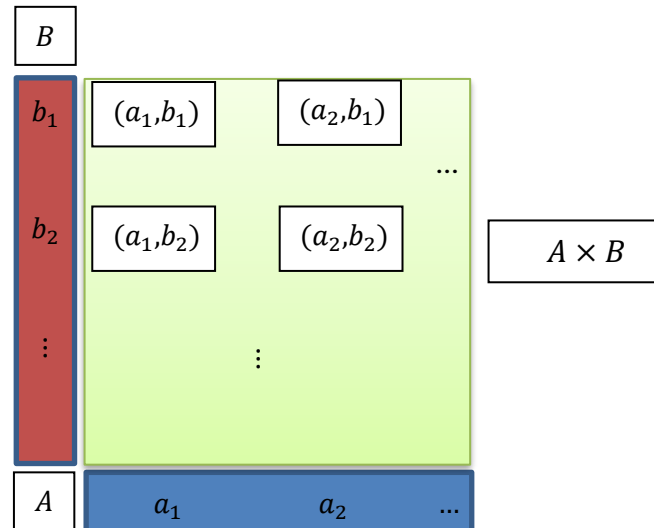
تعریف ۲.۲۱. فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. حاصل ضرب این دو مجموعه را با $A \times B$ یا $A \sqcap B$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ و } b \in B\}$$

و دیده می‌شود که یک مجموعه است و زیرمجموعه‌ای از $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$ است.

به افتخار دکارت که این چنین مجموعه‌ای را ابداع کرد به این مجموعه، حاصل ضرب دکارتی آن دو مجموعه می‌گوئیم (دکارت می‌گفت که ایده‌ی مختصات و حاصل ضرب در خواب به او الهام شده است!).

برای نمایش حاصل ضرب دکارتی دو مجموعه می‌توان از نمایشی شبیه جعبه تخم‌مرغ استفاده کرد:



مثال ۲.۲۲. اگر $A = \{1, 2\}$ و $B = \{a, b\}$ آنگاه داریم:

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$$

$$B \times A = \{(a, 1), (b, 1), (a, 2), (b, 2)\}$$

$$B \times B = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, a)\}$$

قضیه ۲.۲۳ (خواص حاصل ضرب دکارتی). برای مجموعه‌های دل‌خواه A و B و C داریم:

$$(۱) \quad A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$$

$$(۲) \quad \text{قاعده پخشی روی اجتماع} \quad A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$$

$$(۳) \quad \text{قاعده پخشی روی اشتراک} \quad A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$$

$$(۴) \quad \text{قاعده پخشی روی تفاضل} \quad A \times (B - C) = (A \times B) - (A \times C)$$

اثبات. (۱) دقت کنید که $A \times \emptyset = \{(a, x) \mid a \in A \text{ و } x \in \emptyset\}$ و چون مجموعه‌ی تهی عضو ندارد، $x \in \emptyset$ و در نتیجه گزاره شرط در $A \times \emptyset$ همواره نادرست است و لذا $A \times \emptyset$ عضو ندارد. پس $A \times \emptyset = \emptyset$ بطور مشابه $\emptyset \times A = \emptyset$. در ادامه فقط قسمت (۲) را ثابت می‌کنیم، اثبات قسمت‌های (۳) و (۴) مشابه می‌باشد و به عنوان تمرین واگذار می‌شوند.

(۲) اگر $x \in A \times (B \cup C)$ آن گاه برای یک $a \in A$ و یک $y \in B \cup C$ داریم $x = (a, y)$ اگر $y \in B$ آن گاه

$x = (a, y) \in A \times B$ و اگر $y \in C$ آن گاه $x = (a, y) \in A \times C$ و چون $y \in B$ یا $y \in C$ بنابراین

$x = (a, y) \in (A \times B) \cup (A \times C)$ برعکس اگر $x \in (A \times B) \cup (A \times C)$ آن گاه

$x = (a, y) \in A \times B$ یا $x = (a, y) \in A \times C$

■ که در آن $a \in A$ و $y \in B$ یا $y \in C$ پس $y \in B \cup C$ و لذا، $x = (a, y) \in A \times (B \cup C)$

مشابه تعریف زوج مرتب می توان چندتایی مرتب را بصورت زیر تعریف کرد:

برای یک عدد طبیعی دلخواه n یک n -تایی مرتب از اشیاء یک مجموعه‌ی متناهی از n شیء مانند $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ است که به صورت $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ نمایش داده می شود و در آن ترتیب قرار داشتن اشیاء اهمیت داشته باشد. یعنی بتوان آن ها را به صورت یک دنباله متناهی در نظر گرفت به طوری که، برای هر دو n -تایی مرتب مانند $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ داشته باشیم:

$(a_1, a_2, \dots, a_n) = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ اگر و تنها اگر $a_i = b_i$ برای هر $i \in \{1, 2, \dots, n\}$

به طور مشابه برای یک خانواده‌ی دلخواه (نه لزوماً متناهی) از اشیاء مانند $\{A_i\}_{i \in I}$ که با مجموعه‌ی I نام گذاری شده اند، یک I -تایی مرتب یک عبارت نمادین به صورت $(a_i)_{i \in I}$ می باشد که $(a_i)_{i \in I} = (b_i)_{i \in I}$ اگر و تنها اگر $a_i = b_i$ برای هر $i \in I$

با توجه به تعاریف بالا به طور مشابه برای یک خانواده از مجموعه ها مانند $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ حاصل ضرب دکارتی آن ها را با $\prod_{i \in I} A_i$ یا $\times_{i \in I} A_i$ نمایش می دهیم و به صورت زیر تعریف می شود:

$$\prod_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in A_i, \quad i \in I \text{ برای هر } i\}$$

در حالتی که I مجموعه‌ای متناهی با n عنصر مانند $I = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ باشد، آن گاه داریم:

$$\prod_{i=1}^n A_i = A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, \quad i \in I \text{ برای هر } i\}$$

و a_i را مؤلفه‌ی i -ام از n -تایی $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ می نامیم.

همچنین $\prod_{i \in I} A$ را با A^I و در حالت متناهی $\prod_{i=1}^n A = \underbrace{A \times A \times \dots \times A}_n$ را با A^n نمایش می دهیم.

۲.۵. حاصل جمع (هم حاصل ضرب) مجموعه ها

در تعریف عمل اجتماع دو مجموعه‌ی A و B عناصر مشترک آن دو نیز در نظر گرفته می‌شوند. از طرفی عمل تفاضل متقارن مجموعه‌ها $A \Delta B$ هم اجتماعی از دو مجموعه است که عناصر مشترکشان را در نظر نگرفته باشیم. اما گاهی لازم است مجموعه‌ی عناصر دو مجموعه را در نظر بگیریم و هم‌زمان برای ما مهم باشد که در این لحظه یک عنصر مشترک بین دو مجموعه به عنوان عضوی از کدام یک از آن دو در نظر گرفته شود. یعنی بخواهیم بدانیم که در این لحظه، یک عنصر مشترک بین A و B را به عنوان عضوی از A می‌خواهیم به کار ببریم و یا به عنوان عضوی از B . در این حالت اجتماع و تفاضل متقارن نمی‌توانند پاسخی به خواسته ما بدهند. پس نیازمند عملی جدید بین دو مجموعه هستیم که به نوعی عناصر مشترک بین دو مجموعه را نیز مجزا کند و آن‌ها را با توجه به عضویتشان در هر یک از آن دو مجموعه مشخص سازد. برای تعریف چنین عملی کافی است عناصر دو مجموعه را به گونه‌ای نام‌گذاری کنیم تا مشخص شود هر یک (حتی اگر بین هر دو مشترک باشد) از کدام مجموعه آمده‌اند. به این منظور اجتماع مجزای دو مجموعه را تعریف می‌کنیم:

تعریف ۲.۲۴. فرض کنیم A و B دو مجموعه باشند. در این صورت جمع/این دو مجموعه یا اجتماع متمایز آن‌ها را با $A \dot{\cup} B$ (نقطه‌ی بالای نماد اجتماع اشکال چاپی نیست!) یا $A \sqcup B$ یا $A \oplus B$ نمایش می‌هیم و به این صورت تعریف می‌کنیم:

$$A \dot{\cup} B = \{x_a \mid x \in A\} \cup \{x_b \mid x \in B\} \quad \text{یا} \quad A \dot{\cup} B = (A \times \{a\}) \cup (B \times \{b\})$$

که در آن a و b دو شیء متفاوت دلخواه هستند که با کمک مفهوم زوج مرتب (یا به عنوان اندیس) به ترتیب عناصر A و B را نام‌گذاری می‌کنند. به این ترتیب اگر عضوی مانند x در A و B مشترک باشد در اجتماع مجزای آن‌ها به صورت‌های متفاوت $x_a = (x, a)$ و $x_b = (x, b)$ تبدیل می‌شود. به طور مشابه برای یک خانواده از مجموعه‌ها مانند $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \bigcup_{i \in I} \{x_i = (x, i) \mid x \in A_i\}.$$

مثال ۲.۲۵. برای مجموعه‌های $A = \{1, 2, 3, \{1\}\}$ و $B = \{1, 2, 4, 5, \{1\}\}$ داریم (با انتخاب دو شیء متفاوت دلخواه برای نامگذاری عناصر آن‌ها مثلاً ۱ و ۲):

$$\begin{aligned} A \dot{\cup} B &= (A \times \{1\}) \cup (B \times \{2\}) \\ &= \{(1,1), (2,1), (3,1), (\{1\},1), (1,2), (2,2), (4,2), (5,2), (\{1\},2)\}. \end{aligned}$$

در این جا به عنوان نمونه برای شیء مشترک $\{1\}$ از نام (عنصر) $(\{1\},1)$ برای نشان دادن عضویتش در A و از نام (عنصر) $(\{1\},2)$ برای نشان دادن عضویتش در B استفاده شده است. همچنین با انتخاب دو شیء متفاوت دلخواه برای نامگذاری عناصر A مثلاً ۱ و a داریم:

$$\begin{aligned} A \dot{\cup} A &= (A \times \{1\}) \cup (A \times \{a\}) \\ &= \{(1,1), (2,1), (3,1), (\{1\},1), (1,a), (2,a), (3,a), (\{1\},a)\}. \end{aligned}$$

همان گونه که در این مثال دیدیم، می‌توان نشان داد که برای برای مجموعه‌های A و B به ترتیب با تعداد m و n عضو، تعداد $m + n$ عنصر در $A \dot{\cup} B$ وجود دارد.

۳. اصول موضوعه‌ی نظریه‌ی مجموعه‌ها، چرایی نیاز به آن‌ها

در ابتدای قرن بیستم نظریه‌ی "گوتلوب فرگه (۱۸۴۸-۱۹۲۵)" توسط راسل رد شد. فرگه کلاس $\{x \in U \mid p(x)\}$ یعنی تمامی x هایی از مجموعه‌ی مرجع U که گزاره یا خصوصیت $p(x)$ برای آن‌ها برقرار باشد را به عنوان کلاسی از اشیاء در نظر گرفت. همچنین در نظریه‌ی او، خود این کلاس‌ها را نیز می‌توان به عنوان اشیائی در نظر گرفت و عضویت داشتن آن‌ها را در کلاس‌های دیگر بررسی نمود. راسل با کمک ایده‌ی کانتور برای معرفی مجموعه‌ها، در مثالی نشان داد که تعریف فرگه منجر به تناقض می‌گردد. مثال معروف او این بود که اگر خاصیت $p(x)$ برای x را این بگیریم که $x \notin x$ ، آن‌گاه کلاس $\{x \mid p(x)\}$ یعنی $C = \{x \mid x \notin x\}$ ، با مفهوم عضویت مورد تایید نظریه فرگه تناقض ایجاد می‌کند؛ در واقع دیده می‌شود که $C \in C$ اگر و تنها اگر $C \notin C$ (وجود این تناقض را در این دسته بررسی کنید). گروهی برای جلوگیری از چنین تناقضاتی رأی به کنارگذاشتن موارد این چنینی و شاخه‌هایی از ریاضیات (که بویژه به کارهای کانتور و فرگه مربوط می‌شد) دادند. اما در پیش صف مقابله با آن‌ها "هیلبرت" چنین آرائی را نپذیرفت و برنامه‌ای برای صورت‌گرایی در ریاضیات و بیان همه چیز براساس زبان و اصولی خاص و روش‌های استدلال پیشنهاد داد. سیستم‌ها و راه‌حل‌های راسل برای جلوگیری از تناقضاتی که خود برخی از آن‌ها را یافته بود به‌صورت ساده‌تری توسط زرمelo بیان گردید و با کارهای فرانکل و همکارش اسکولم تقویت گردید و به اصول زرمelo-فرانکل (به اختصار ZF) شهرت یافت. این اصول با افزودن چند اصل مورد نیاز و مهم دیگر از جمله اصل انتخاب و اصل موضوع انتظام یا خوش بنیادی کامل‌تر گردید و اکنون با عنوان اصول یا سیستم ZFC (حرف C برای کلمه‌ی choice از اصل انتخاب است) راه‌گشا و بی‌خطا بوده است (اگرچه سوالات بسیاری به‌ویژه به سبب اصل انتخاب به‌عنوان یک اصل ثابت نشدنی و با اثر عجیب در بی‌نهایت‌ها ایجاد کرده است).

با توجه به مطالبی که در این فصل گفته شد، اصول موضوعه‌ی زیر می‌توانند مفهوم مجموعه را که تعریف دقیقی از آن نداشتیم تا حدود زیادی مشخص نمایند. با استفاده از این اصول و با کمک صوری کردن ریاضیات سعی در آن داریم که از پارادوکس‌هایی که گفته شد دوری جسته و در عین حال چیزی هم از مبانی و حوزه‌های (حتی چالش برانگیز) ریاضیات حذف نکنیم، با این امید (و شاید یقین) که این چالش‌ها کمتر شده و تناقضی پیش نیاید.

– اصل موضوع توسیع: دو مجموعه مساوی‌اند اگر و تنها اگر همه‌ی اعضای هر یک با دیگری یکسان باشند.

– اصل موضوع مجموعه‌ی تهی: مجموعه‌ای وجود دارد که هیچ عضوی ندارد (به کمک اصل موضوع توسیع در ابتدای بخش دیدیم که این مجموعه‌ی تهی یکتاست و آن را با $\emptyset$ یا $\{\}$ نمایش می‌دهیم).

– اصل موضوع مجموعه‌ی جفتی (جفت سازی): اگر A و B دو مجموعه باشند، آن‌گاه $\{A, B\}$ نیز یک مجموعه است.

– اصل موضوع اجتماع: اگر B یک مجموعه متشکل از مجموعه‌ها باشد، آن‌گاه اجتماع عناصر B (یعنی مجموعه‌های موجود در آن) نیز یک مجموعه خواهد بود.

– اصل موضوع مجموعه‌ی توانی: B یک مجموعه باشد، گردایه‌ی متشکل از همه‌ی زیرمجموعه‌های آن (یعنی $\mathcal{P}(B)$) یک مجموعه است.

– اصل موضوع انتظام: اگر B یک مجموعه باشد، آنگاه یا $B = \emptyset$ یا B عضوی مانند d دارد که $B \cap d = \emptyset$.

– اصل موضوع تصریح: اگر B یک مجموعه باشد آن‌گاه هر بخش تعریف شدنی از آن نیز یک مجموعه است (منظور از یک بخش تعریف شدنی از B ، بخشی از عناصر آن می‌باشد که در یک گزاره یا فرمول خوش‌ساخت منطقی صدق کند).

- اصل موضوع انتخاب: اگر B یک مجموعه متشکل از مجموعه‌ها باشد، آن‌گاه می‌توان مجموعه‌ای مانند C در نظر گرفت که در آن از هر یک از عناصر B عضوی انتخاب شده باشد.

درباره‌ی این اصل و چالش‌های پیرامون آن در بخش ؟؟ بیشتر خواهیم دانست.

۴. تمرین‌ها

(۱) اصول موضوعه نظریه مجموعه‌ها را با کمک روابط منطقی و سورها به شکل نماد ریاضی بنویسید.

۲) با چه شرط یا شرایطی می‌توان گفت دو مجموعه برابر نیستند؟ چگونه ثابت کنیم دو مجموعه با هم برابرند؟ آیا مجموعه‌ی $\{a, b\}$ با هریک از دو مجموعه‌ی $\{c, d\}$ و $\{c, d, e\}$ برابر است؟ چرا؟

- در هر مورد درستی یا نادرستی تساوی یا نامساوی داده شده را بررسی کنید.

$$۳\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - 2x + 1 = 0\} \neq \{1, -1\}$$

$$۴\{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 + 1 = 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 < 0\}$$

$$۵\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ عددی زوج و اول است}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 - \frac{3}{2}x - 1 = 0\}$$

$$۶\{x \in \mathbb{Z} \mid x^3 - 4x = 0\} \neq \{2x \in \mathbb{N} \mid x^2 = 4\}$$

- در هر مورد مجموعه‌ی داده شده را بصورت نماد مجموعه‌ساز بنویسید (آیا می‌توانید در هر مورد بیش از یک نمایش مجموعه‌ساز یا تعریف برای هر کدام بنویسید؟ تلاش کنید!).

$$۷A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, \dots\}$$

$$۸B = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$$

$$۹C = \{1, 4, 9, 16, 25, 36, \dots\}$$

$$۱۰D = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \dots\}$$

(۱۱) مجموعه‌ی اعداد صحیح نامنفی E :

(۱۲) مجموعه‌ی اعداد گویا F :

(۱۳) مجموعه‌ی جواب‌های گویای معادله‌ی $G: x^3 - 6x - 6 = 0$

(۱۴) مجموعه‌ی نقاط خط به معادله‌ی $H: (y = x + 1)$

(۱۵) مجموعه‌ی نقاط روی دایره به مرکز مبدأ و شعاع یک واحد I :

(۱۶) مجموعه‌ی نقاط روی نیم‌دایره بالایی از دایره به مرکز مبدأ و شعاع یک واحد J :

(۱۷) مجموعه‌ی اعداد اول K :

$$۱۸) L = \{1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}\}$$

$$۱۹M = \{-1, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, 0\}$$

(۲۰) مجموعه‌ی اعدادی که مضرب ۳ هستند اما مضرب ۵ نیستند. N :

(۲۱) مجموعه‌ی متشکل از مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج و مجموعه‌ی مضارب مثبت ۵ و مجموعه‌ی مضارب مثبت ۳ P :

(۲۲) توضیح دهید چه هنگام برای دو مجموعه‌ی دلخواه A و B داریم، $A \not\subseteq B$ و $A \not\supset B$. در هر مورد حداقل دو مثال متفاوت بزنید.

(۲۳) الف) تفاوت اعضا و زیرمجموعه‌های یک مجموعه را با چند مثال بیان نمائید.

ب) آیا مجموعه‌ای دو عضوی می‌شناسید که هر عضو آن زیرمجموعه‌ی آن هم باشد؟ مجموعه‌ی سه عضوی با این خاصیت چگونه؟

ج) مجموعه‌ای با دست‌کم ۵ عضو بسازید که برای هر دو عضو متفاوت آن، یکی عضو دیگری باشد.

- در هر مورد عناصر هر مجموعه‌ی داده شده مانند X و مجموعه‌ی توانی‌اش (یعنی، $\mathcal{P}(X)$) و مجموعه‌ی مجموعه‌ی توانی آن (یعنی، $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$) را مشخص نمائید.

$${}^{24}A = \{\}$$

$${}^{25}B = \{\{\}\}$$

$${}^{26}C = \{1\}$$

$${}^{27}D = \{1, a\}$$

$${}^{28}E = \{1, \{1\}\}$$

$${}^{29}F = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

$${}^{30}G = \{1, \{2\}\}$$

(۳۱) با توجه به سوالات بالا ثابت کنید برای اعداد صحیح نامنفی $k \leq n$ ، تعداد زیرمجموعه‌های k عضوی از یک مجموعه n عضوی برابر است با $\binom{n}{k}$. در چند مثال این مطلب را بررسی کنید. آیا می‌توانید تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی صفر یا یک یا دو عضوی را مشخص کنید؟ تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی (n عدد صحیح نامنفی) چندتاست؟ 2^n ؟ چرا؟ دست‌کم به دو روش پاسخ خود را ثابت کنید (از قسمت ابتدایی این سوال هم در یک روش اثبات می‌توانید استفاده کنید)!

(۳۲) تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه‌ی n عضوی برابر با 16^{n-3} است. این مجموعه چند عنصر دارد؟

(۳۳) جمع تعداد عناصر مجموعه‌ی A و تعداد عناصر مجموعه‌ی B برابر ۱۵ است. اگر A هشت برابر B زیرمجموعه داشته باشد، تعداد عناصر هر یک از این دو مجموعه را مشخص کنید.

(۳۴) اگر برای مجموعه‌ی A ، $\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))$ دارای ۲۵۶ عنصر باشد، آنگاه خود A چند عضو دارد؟

- در هر مورد اجتماع، اشتراک، تفاضل‌ها، متمم‌ها و تفاضل‌های متقارن مجموعه‌های داده شده را بدست آورید.

$$B = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\} \text{ و } A = \{\{a, b\}, a\} \quad (35)$$

$$D = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}\} \text{ و } C = \{\{\emptyset\}, \emptyset\} \quad (۳۶)$$

- درستی هر مورد را بررسی کنید.

$$۳۷ \quad -1, 1 \in \{x | x^3 - 4x - 5 = 0\} \cup \{x | 2x^3 - 5x + 3 = 0\}$$

$$۳۸ \quad -1, 1 \in \{x | x^3 + 4x - 5 = 0\} \cap \{x | 2x^3 - 5x + 3 = 0\}$$

$$۳۹ \quad 4, -1 \in \{x \in \mathbb{Z} | x > 2\} - \{x \in \mathbb{Z} | x^4 + 2x + 1 = 0\}$$

$$۴۰ \quad 4, -1 \in \{x \in \mathbb{Z} | x^4 + 2x + 1 = 0\} - \{x \in \mathbb{Z} | x > 2\}$$

$$۴۱ \quad 3, -1 \in \{x \in \mathbb{Z} | x^4 + 2x + 1 = 0\} \Delta \{x \in \mathbb{Z} | x > 2\}$$

(۴۲) فرض کنید $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ یک خانواده متشکل از مجموعه‌ها باشد. بررسی کنید که آیا این که بگوئیم همه‌ی عناصر این خانواده مجزا هستند با این که هر دو عضو این خانواده مجزا هستند تفاوتی دارد؟ در واقع بررسی کنید آیا،

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset \text{ اگر و تنها اگر } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ برای هر } i, j \in I$$

(۴۳) فرض کنید $A = \{a_n = (-1)^n | n \in \mathbb{N}\}$ بررسی کنید آیا A به عنوان یک مجموعه با A به عنوان یک خانواده یکسان است و چرا؟

- در هر مورد اجتماع و اشتراک خانواده‌ی $\mathcal{F}$ داده شده از مجموعه‌ها را بدست آورید.

$$۴۴ \quad \mathcal{F} = \{[-k, k]\}_{k \in \mathbb{N}}$$

$$۴۵ \quad \mathcal{F} = \{(-k, k)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

$$۴۶ \quad \mathcal{F} = \{(-k, k]\}_{k \in \mathbb{N}}$$

$$۴۷ \quad \mathcal{F} = \{[k, k+1]\}_{k \in \mathbb{N}}$$

$$۴۸ \quad \mathcal{F} = \{[-k, -k+1]\}_{k \in \mathbb{N}}$$

$$۴۹ \quad \mathcal{F} = \{[-1/k, 1/k]\}_{k \in \mathbb{N}}$$

$$۵۰ \quad \mathcal{F} = \{(-1/k, 1/k)\}_{k \in \mathbb{N}}$$

$$۵۱ \quad \mathcal{F} = \{A_k = \{1, 2, \dots, k\}\}_{k \in \mathbb{N}}$$

(۵۲) فرض کنید $\{A_i\}_{i \in I}$ یک خانواده متشکل از مجموعه‌ها و A یک مجموعه باشد. در هر یک از موارد زیر ابتدا طرف دوم تساوی را، به کمک قضایای مشابه برای تعداد متناهی از مجموعه‌ها، حدس بزنید و سپس حدس خود را ثابت کنید.

$$A \times \bigcap_{i \in I} A_i =$$

$$A \times \bigcup_{i \in I} A_i =$$

- درستی یا نادرستی هر یک از گزاره‌های زیر را بررسی کنید. برای هر یک دست کم دو مثال متفاوت بزنید. همچنین گزاره‌های درست را اثبات کنید و برای رد گزاره‌های نادرست مثال نقض بزنید (دقت کنید که حروف کوچک یا بزرگ هر دو می‌توانند نمایش دهنده‌ی اعضا یا مجموعه‌ها باشند).

$$53 x \in \{x\})$$

$$54 \{x\} \in \{x\})$$

$$55 x \in A \wedge A \in B \rightarrow x \in B)$$

$$56 x \in A \wedge A \subseteq B \rightarrow x \in B)$$

$$57 x \notin B \wedge A \subseteq B \rightarrow x \notin A)$$

$$58 x \in A \wedge A \not\subseteq B \rightarrow x \notin B)$$

$$59 x \subseteq A \wedge A \in B \rightarrow x \in B)$$

$$60 x \subseteq A \wedge A \in B \rightarrow x \subseteq B)$$

$$61 A \not\subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C)$$

$$62 A \not\subseteq B \wedge B \subseteq C \rightarrow A \not\subseteq C)$$

$$63 A \not\subseteq B \wedge B \not\subseteq C \rightarrow A \not\subseteq C)$$

$$64 A \subseteq B \cup C \rightarrow (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$$

$$65 A \subseteq B \cup C \leftarrow (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$$

$$66 A \subseteq B \cup C \rightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$$

$$67 A \subseteq B \cup C \leftarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$$

$$68 B \cap C \subseteq A \rightarrow (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$$

$$69 B \cap C \subseteq A \leftarrow (A \subseteq B \vee A \subseteq C)$$

$$70 B \cap C \subseteq A \rightarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$$

$$71 B \cap C \subseteq A \leftarrow (A \subseteq B \wedge A \subseteq C)$$

$$72 A \cup (B - C) = (A \cup B) - (A \cup C)$$

$$\forall x A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

$$\forall x A - (B \cup C) = (A - B) \cup (A - C)$$

$$\forall x A - (B \cap C) = (A - B) \cap (A - C)$$

$$\forall x \mathcal{P}(\emptyset) = \emptyset$$

$$\forall x \mathcal{P}(A \times B) = \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B)$$

$$\forall x A \times B \subseteq C \times D \leftrightarrow A \subseteq C \text{ و } B \subseteq D$$

$$\forall x (A \times B) \cap (C \times D) = (A \cap C) \times (B \cap D)$$

(گزاره‌ی آخر درست است، آن را ثابت کنید!)

۸۰) آیا خاصیت حذفی برای اجتماع (و اشتراک و تفاضل و حاصل ضرب) برقرار است، یعنی اگر $A \cup B = A \cup C$ آنگاه $B = C$ (یا به طور مشابه آیا از هر یک از $A \cap B = A \cap C$ یا $A \times B = A \times C$ یا $A - B = A - C$ می‌توان نتیجه گرفت $B = C$ ؟).

۸۱) بررسی کنید که تعریف وینر برای زوج‌های مرتب خاصیت مورد نظر برای تساوی زوج‌های مرتب را دارد.

۸۲) بررسی کنید که آیا نمادهای مجموعه‌ساز زیر، تشکیل مجموعه می‌دهند؟ چرا؟ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

$$A = \{p \mid \text{یک جمله‌ی سؤالی با پاسخ نه می‌باشد.}\}$$

$$B = \{x \mid \text{یک عدد باشد که بتوان برای آن یک ویژگی در قالب یک جمله با کمتر از ۱۰۰ حرف بیان کرد.}\}$$

(راهنمایی: عضویت جمله‌ی "آیا این جمله در A وجود دارد؟" در A را بررسی کنید. همچنین برای B ، بررسی کنید که اگر مجموعه باشد آیا متناهی است و عضویت یک عدد مانند x با این ویژگی که " x اولین عددی است که در B قرار ندارد" را در آن بررسی کنید.)

فصل سوم

روابط و نگاشت‌ها

۱. روابط و انواع آن‌ها

هنگامی که در ریاضیات صحبت از رابطه‌ی بین مجموعه‌ها یا عناصر آن‌ها می‌شود، رابطه‌ی کمتری اعداد به عنوان اولین مثال‌ها می‌تواند بیان شود. بنابه تعریف، این رابطه به هر عدد دل‌خواه هر عدد بزرگتر از آن را نسبت دهد. مثلاً اگر این رابطه را روی مجموعه‌ی $\{1, 2, 4\}$ در نظر بگیریم، داریم $1 < 2$ و $2 < 4$ و $1 < 4$ ، که همواره در سمت چپ (طرف اول) عدد کوچکتر نوشته می‌شود و سپس در سمت راست (طرف دوم) عدد بزرگتر. پس می‌توان هر نمایش بالا را به صورت زوج مرتبی در نظر گرفت که عدد کوچکتر مؤلفه‌ی اول آن باشد، یعنی، $(1, 2)$ و $(2, 4)$ و $(1, 4)$. در این صورت مجموعه‌ی همه‌ی چنین زوج مرتب‌هایی، یعنی $\{(1, 2), (2, 4), (1, 4)\}$ مشخص کننده‌ی رابطه‌ی $<$ روی $\{1, 2, 4\}$ است. دقت کنید که این مجموعه در واقع زیرمجموعه‌ی ویژه‌ای از $\{1, 2, 4\} \times \{1, 2, 4\}$ است. مشابه این مثال هر زیرمجموعه از حاصل ضرب دکارتی هر مجموعه در خودش یک رابطه بین برخی از عناصر آن مجموعه را مشخص می‌کند. در حالت کلی برای رابطه تعریف زیر را داریم.

تعریف ۱.۳. اگر A و B دو مجموعه باشند، هر زیرمجموعه‌ی دلخواه مانند R از $A \times B$ را یک رابطه (رابطه‌ی دوتایی یا نسبت یا قاعده) از A به B می‌گوئیم. اگر $A = B$ ، آن‌گاه R را یک رابطه روی A می‌گوئیم و گاهی می‌نویسیم (A, R) یک مجموعه‌ی رابطه‌دار است.

پس یک رابطه، مجموعه‌ای متشکل از زوج‌های مرتب است. با این توصیف برای رابطه‌ی R از A به B اگر $(a, b) \in R$ ، می‌نویسیم $a R b$ (دقت کنید که همان‌گونه که ترتیب قرار گرفتن a و b در (a, b) مهم است، ترتیب نوشتن a و b در $a R b$ هم اهمیت دارد). همچنین اگر $(a, b) \notin R$ (یعنی a و b تحت R رابطه نداشته باشند) می‌نویسیم $a \not R b$. مجموعه‌ی همه‌ی مؤلفه‌های اول عناصر یک رابطه مانند $S \subseteq A \times B$ را دامنه‌ی آن رابطه و مجموعه‌ی همه مؤلفه‌های دوم این عناصر را تصویر، نگاره، رنج یا بُرد S گوئیم و آن‌ها را به ترتیب با D_S و R_S نمایش می‌دهیم. درواقع داریم،

$$D_S = \{a \in A \mid \exists b \in B \ (a, b) \in S\} \quad \text{دامنه‌ی } S$$

$$R_S = \{b \in B \mid \exists a \in A \ (a, b) \in S\} \quad \text{بُرد } S$$

گاهی دامنه‌ی S را با $Dom(S)$ و تصویر آن‌را با $Im(S)$ هم نمایش می‌دهیم). گاهی برای نمایش رابطه‌ها از نمادهایی مانند $<$ یا $>$ یا $\sim$ یا $\equiv$ استفاده می‌کنیم.

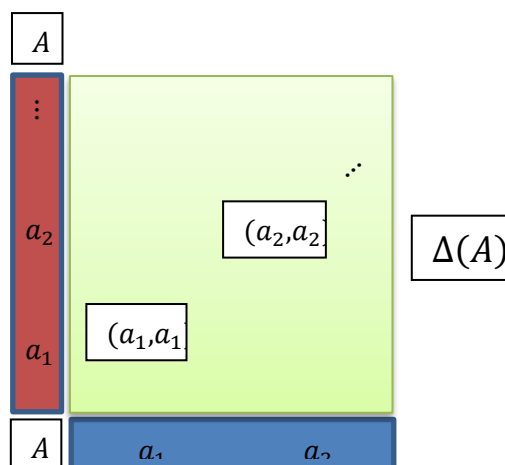
مثال ۲.۳. مفهوم بخش‌پذیری در اعداد صحیح تعریف شده به صورت زیر، یک رابطه معرفی می‌کند که به آن رابطه‌ی بخش‌پذیری یا شمردن گوئیم:

برای هر عدد صحیح ناصفر a و عدد صحیح b ، گوئیم b بر a بخش‌پذیر است (یا عدد a عدد b را می‌شمارد) و می‌نویسیم، $a \mid b$ اگر و تنها اگر $b = ma$ ، برای یک عدد صحیح m . بنابراین رابطه‌ی بخش‌پذیری عبارت است از:

$$\{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z} - \{0\} \text{ و } b \in \mathbb{Z} \text{ و } a \mid b\} \subseteq (\mathbb{Z} - \{0\}) \times \mathbb{Z}$$

مثال ۳.۳. روی هر مجموعه‌ی دل‌خواه مانند A همواره دو رابطه‌ی بدیهی وجود دارند، یکی خود $A \times A$ به عنوان بزرگترین رابطه روی A که آن‌را با $\nabla(A)$ نمایش می‌دهیم و دیگری رابطه‌ی زیر که به رابطه‌ی قطری یا همانی روی A موسوم است و آن‌را با $d(A)$ یا $\Delta(A)$ (یا گاهی $I(A)$) نمایش می‌دهیم.

$$\Delta(A) = \{(a, a) \mid a \in A\}$$



تعریف ۴.۳. اگر A و B دو مجموعه باشند، و R یک رابطه از A به B باشد، آن‌گاه وارون R را با R^{-1} نمایش می‌دهیم و رابطه‌ای از B به A به صورت زیر می‌باشد:

$$R^{-1} = \{ (b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R \}$$

بنابراین دامنه‌ی R^{-1} برابر تصویر R است و تصویر R^{-1} همان دامنه‌ی R است.

به عنوان نمونه رابطه‌ی بخش‌پذیری وارون رابطه‌ی شمردن است و رابطه‌ی بزرگتری اعداد وارون رابطه‌ی کوچکتری اعداد است.

۱.۱. برخی از انواع رابطه‌ها

فرض کنید R یک رابطه روی مجموعه‌ی A باشد. در این صورت تعاریف زیر را داریم:

تعریف ۳.۵. (۱) (رابطه‌ی انعکاسی) R را یک رابطه‌ی انعکاسی یا بازتابی گوئیم، هرگاه هر عنصر از A با خودش تحت R در رابطه باشد، یعنی، برای هر $a \in A$ داشته باشیم $a R a$.

(۲) (رابطه‌ی تقارنی) R را یک رابطه‌ی تقارنی یا متقارن گوئیم، هرگاه اگر برای هر دو عنصر a و b از A که داشته باشیم، $a R b$ آن‌گاه $b R a$.

(۳) (رابطه‌ی تعدی) R را یک رابطه‌ی متعدی یا ترایی گوئیم، هرگاه اگر برای هر سه عنصر a و b و c از A که داشته باشیم، $a R b$ و $b R c$ آن‌گاه $a R c$.

(۴) (رابطه‌ی پاد تقارنی) R را یک رابطه‌ی پاد تقارنی یا پادمتقارن گوئیم، هرگاه اگر برای هر دو عنصر a و b از A که داشته باشیم، $a R b$ و $b R a$ آن‌گاه $a = b$.

مثال ۳.۶. رابطه‌ی $<$ روی اعداد صحیح خاصیت تعدی دارد اما بازتابی و متقارن و پادمتقارن نیست (بررسی کنید چرا). اما اگر رابطه‌ی کوچکتر یا مساوی ($\leq$) روی اعداد صحیح در نظر گرفته شود، با توجه به خواص آن می‌توان دید که بازتابی، پادمتقارن و متعدی است، اگرچه متقارن نیست (مثلاً $2 \leq 3$ اما $3 \not\leq 2$).

تعریف ۷.۳. گوئیم رابطه‌ی R روی A در خاصیت تثلیث یا سه‌گانه‌ی ضعیف صدق می‌کند، هرگاه برای هر دو عنصر a و b از A داشته باشیم، $a R b$ یا $b R a$ یا $a = b$ اگر این سه "یا" مانع جمع باشند، یعنی دقیقاً یکی از این سه‌گانه برقرار باشد، گوئیم R روی A در خاصیت تثلیث یا سه‌گانه‌ی قوی صدق می‌کند.

به عنوان مثال رابطه‌ی $<$ روی اعداد صحیح در خاصیت سه‌گانه به‌طور قوی صدق می‌کند، زیرا برای هر دو عدد صحیح x و y همواره تنها یا $y < x$ یا $x < y$ یا $x = y$ (و نه هر دو یا هر سه و نه هیچ‌کدام).

تعریف ۸.۳. هر رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A را که بازتابی، پادتقارنی و متعدی باشد را یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی A می‌گوئیم (دراین حالت A را جزئاً مرتب یا به‌طور جزئی مرتب شده گوئیم). به‌علاوه اگر (A, R) دارای خاصیت سه‌گانه ضعیف هم باشد، R را یک رابطه‌ی ترتیب کلی روی A می‌گوئیم (در این حالت (A, R) را کلاً مرتب یا به‌طور کلی مرتب شده گوئیم). هم‌چنین هر رابطه‌ی بازتابی، متقارن و متعدی را یک رابطه‌ی هم‌ارزی می‌گوئیم.

به‌عنوان نمونه $(\mathbb{Z}, \leq)$ یک مجموعه‌ی به‌طور کلی مرتب شده است. هم‌چنین رابطه‌ی تساوی یک مثال همیشگی از رابطه‌ی هم‌ارزی است.

دقت کنید که یک رابطه نمی‌تواند همزمان هم متقارن و هم پادمتقارن باشد مگر این‌که رابطه‌ی قطری یا زیر مجموعه‌ای سره از آن باشد. پس یک رابطه‌ی هم‌ارزی غیر قطری ترتیب جزئی نخواهد بود (تمرین ۱۲ آخر این فصل از شما خواسته است که این دو مطلب را بررسی کنید).

مثال ۹.۳. یکی از روابط هم‌ارزی مهم روی مجموعه‌ی اعداد صحیح رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی عدد طبیعی ثابت $1 < n$ است که آن‌را با $\equiv^n$ نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

برای هر دو عدد صحیح a و b ، $a \equiv^n b$ اگر و تنها اگر $n | a - b$ ، که معادل است با این‌که برای یک عدد صحیح k داریم، $a - b = nk$ (یعنی، $a = nk + b$)، و به‌این معناست که a و b در تقسیم بر n باقیمانده‌ی یکسانی دارند.

در این صورت با کمک خواص بخش‌پذیری براحتی می‌توان دید که $\equiv^n \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است (بررسی کنید).

مثال ۱۰.۳. اگر A یک مجموعه و X خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های آن باشد (مثلاً $X = \mathcal{P}(A)$) آن‌گاه رابطه‌ی زیرمجموعه بودن (شمول) یک رابطه‌ی ترتیب جزئی روی X است، زیرا،

- برای هر $B \subseteq A$ ، $(B \in X) B \subseteq B$ ، پس $\subseteq$ خاصیت بازتابی دارد.

- برای هر B و C ، $(B, C \in X)$ اگر $B \subseteq C$ و $C \subseteq B$ ، آن‌گاه $B = C$ ، پس $\subseteq$ خاصیت پادتقارنی دارد.

- برای هر $D \subseteq A$ و C و B ، $(B, C, D \in X)$ اگر $B \subseteq C$ و $C \subseteq D$ ، آن‌گاه $B \subseteq D$ ، پس $\subseteq$ خاصیت تعدی دارد.

دقت کنید که این رابطه ترتیب کلی نیست، زیرا ممکن است برای دو زیرمجموعه از A ، هیچ یک زیرمجموعه‌ای از دیگری نباشد، مثلاً اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $X = \{\emptyset, \{2, 3\}, \{1, 2\}, \{1\}\}$ و $B = \{1, 2\}$ و $C = \{2, 3\}$ آن‌گاه $B \not\subseteq C$ و $C \not\subseteq B$ و $B \neq C$.

اگر رابطه‌ی هم‌ورودی (هم‌کلاسی) بودن را روی مجموعه‌ی دانشجویان رشته‌ی ریاضی یک دانشگاه در نظر بگیریم، می‌توان دید که این رابطه یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. به‌علاوه هر دانشجو با هم‌ورودی‌های خودش (یعنی با همه‌ی افرادی که با او رابطه‌ی هم‌ورودی دارند) در یک کلاس قرار دارد. همچنین همه‌ی افرادی هم که در یک کلاس هستند، با هم رابطه‌ی هم‌ورودی (هم‌کلاسی) دارند. درواقع این رابطه باعث تقسیم بندی همه‌ی دانشجویان رشته‌ی ریاضی به گروه‌های مجزا از هم می‌شود که همان کلاس‌ها هستند. خواهیم دید که این توصیف برای هر رابطه‌ی هم‌ارزی دیگری هم قابل بیان است. پس مفهوم کلاس‌ها را برای یک رابطه‌ی هم‌ارزی دل‌خواه به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

تعریف ۱۱.۳. فرض کنید R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A باشد و $a \in A$. دراین‌صورت مجموعه‌ی همه‌ی عناصری از A که تحت R با a رابطه دارند را کلاس این عنصر گوئیم و با $[a]$ یا $\bar{a}$ یا $\frac{a}{R}$ نمایش می‌دهیم (همچنین a را نماینده این کلاس می‌نامیم)، یعنی،

$$\frac{a}{R} = [a] = \bar{a} = \{x \in A \mid x R a\}$$

می‌توان دید که هر کلاس هم‌ارزی از یک رابطه روی یک مجموعه خود یک مجموعه است. همچنین مجموعه‌ی همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی R روی مجموعه‌ی A را با $\bar{A}$ یا $[A]_R$ یا $\frac{A}{R}$ نمایش می‌دهیم، یعنی،

$$\frac{A}{R} = [A]_R = \bar{A} = \left\{ \frac{a}{R} = [a] = \bar{a} \mid a \in A \right\}$$

که مجموعه‌ای متشکل از مجموعه‌هاست.

مثال ۱۲.۳. اگر رابطه‌ی هم‌نهشتی به پیمانه‌ی n روی $\mathbb{Z}$ را در نظر بگیریم، کلاس‌های هم‌ارزی به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} \forall a \in \mathbb{Z}, \bar{a} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \stackrel{n}{\equiv} a\} \\ &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x = nk + a \text{ برای یک عدد صحیح } k\} \\ &= \{nk + a \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

بنابراین:

$$\begin{aligned} \bar{0} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \stackrel{n}{\equiv} 0\} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \bar{1} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \stackrel{n}{\equiv} 1\} = \{nk + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \bar{2} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \stackrel{n}{\equiv} 2\} = \{nk + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

و به همین ترتیب با ادامه این روند داریم:

$$\begin{aligned} \overline{n-1} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \stackrel{n}{\equiv} n-1\} = \{nk + (n-1) \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ \bar{n} &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x \stackrel{n}{\equiv} n \stackrel{n}{\equiv} 0\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \stackrel{n}{\equiv} 0\} = \{nk \mid k \in \mathbb{Z}\} = \bar{0} \end{aligned}$$

بنابراین از این جا به بعد کلاس‌های اعداد صحیح تکراری می‌شوند. مثلاً:

$$\bar{0} = \bar{n} = \overline{2n} = \dots$$

$$\bar{1} = \overline{n+1} = \overline{2n+1} = \dots$$

درواقع بنابر الگوریتم تقسیم برای عدد a که باقیمانده تقسیم هر $x \in \bar{a}$ بر n است $x = nk + a$ برای یک عدد صحیح k تنها n حالت مختلف وجود دارد $(0 \leq a < n - 1)$. پس به پیمانه‌ی n تعداد n کلاس هم-ارزی وجود دارند که به صورت بالا به دست می‌آیند و به آن‌ها کلاس‌های هم‌نهشتی به پیمانه‌ی n هم گفته می‌شود. پس،

$$\frac{\mathbb{Z}}{n} = \left\{ \frac{x}{n} = \bar{x} \mid x \in \mathbb{Z} \right\} = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \dots, \overline{n-1}\}$$

که آن را با $\mathbb{Z}_n$ نمایش می‌دهیم.

دقت کنید که با تغییر رابطه همه چیز ممکن است تغییر کند! حتی در همین رابطه‌ی هم‌نهشتی هم با تغییر پیمانه‌ی هم‌نهشتی رابطه عوض شده و همه‌ی کلاس‌ها تغییر می‌کنند. به عنوان مثال برای $n = 2$ کلاس‌های رابطه‌ی $\mathbb{Z} \equiv^2$ روی عبارتند از:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv^2 0\} = \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv^2 1\} = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

اما برای $n = 3$ کلاس‌های رابطه‌ی $\mathbb{Z} \equiv^3$ عبارتند از:

$$\bar{0} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv^3 0\} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv^3 1\} = \{3k + 1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\bar{2} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv^3 2\} = \{3k + 2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

که با کلاس‌های رابطه‌ی $\equiv^2$ متفاوت هستند، مثلاً $4 \in \bar{0}$ در رابطه‌ی $\equiv^2$ ، اما نسبت به رابطه‌ی $\equiv^3$ ، $4 \notin \bar{0}$ (درواقع $4 \in \bar{1}$ زیرا $4 = 3 \times 1 + 1$). ■

مثال ۳.۱۳. فرض کنید $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ و $\sim$ رابطه‌ای روی $A = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ (یعنی $\sim \subseteq (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0) \times (\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)$) تعریف شده بصورت زیر باشد:

برای هر دو عنصر (a, b) و $(c, d) \in A$ ، $(a, b) \sim (c, d)$ اگر و تنها اگر $a + d = c + b$.

در این صورت $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی A است، زیرا،

- برای هر $(a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ داریم، $a + b = a + b$ و لذا $(a, b) \sim (a, b)$. پس $\sim$ بازتابی است.

- برای هر دو عنصر (a, b) و $(c, d) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ اگر $(a, b) \sim (c, d)$ آن‌گاه $a + d = c + b$ و لذا $c + b = a + d$ و $(c, d) \sim (a, b)$ ، یعنی $\sim$ رابطه‌ای متقارن است.

- همچنین اگر برای (a, b) و (c, d) و $(e, f) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ داشته باشیم، $(a, b) \sim (c, d)$ و $(c, d) \sim (e, f)$ آن‌گاه داریم:

$$\left. \begin{array}{l} (a, b) \sim (c, d) \Rightarrow a + d = c + b \\ (c, d) \sim (e, f) \Rightarrow c + f = e + d \end{array} \right\} \xRightarrow{\text{جمع طرفین دو تساوی}} (a + d) + (c + f) = (c + b) + (e + d)$$

که با ساده‌سازی c و d از دو طرف تساوی اخیر داریم:

$$a + f = e + b$$

که نتیجه می‌دهد، $(a, b) \sim (e, f)$ ، یعنی $\sim$ یک رابطه‌ی ترایی یا متعدی است.

اکنون کلاس برخی از عناصر $A = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ را تحت این رابطه به‌دست می‌آوریم.

$$\begin{aligned} \overline{(0, 1)} &= \{ (a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid (a, b) \sim (0, 1) \} = \{ (a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid a + 1 = b \} \\ &= \{ \text{دوتایی‌هایی از } \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \text{ که مؤلفه‌ی دوم‌شان یکی بیشتر از مؤلفه‌ی اول آن‌هاست} \} \\ &= \{ (0, 1), (1, 2), (2, 3), \dots \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{(1, 0)} &= \{ (a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid (a, b) \sim (1, 0) \} = \{ (a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid a = b + 1 \} \\ &= \{ \text{دوتایی‌هایی از } \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \text{ که مؤلفه‌ی اول‌شان یکی بیشتر از مؤلفه‌ی دوم آن‌هاست} \} \\ &= \{ (1, 0), (2, 1), (3, 2), \dots \} \\ \overline{(1, 1)} &= \{ (a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid (a, b) \sim (1, 1) \} = \{ (a, b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid a + 1 = b + 1 \} \\ &= \{ \text{دوتایی‌هایی از } \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \text{ که مؤلفه‌ی اول‌شان و مؤلفه‌ی دوم آن‌ها برابرست} \} \\ &= \{ (0, 0), (1, 1), (2, 2), \dots \} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

قضیه ۱۴.۳. اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A باشد، آن‌گاه R^{-1} هم یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

اثبات. تمرین.

تعریف ۱۵.۳. اگر X مجموعه‌ای ناتهی و P مجموعه‌ای متشکل از زیرمجموعه‌هایی ناتهی از X باشد که در همه‌ی شرایط زیر صدق کنند، آن‌گاه P را یک *فزار* یا *تقسیم‌بندی* برای X گوئیم:

$$(۱) \text{ برای هر } A \in P, A \neq \emptyset$$

$$(۲) \text{ برای هر دو مجموعه‌ی متمایز } A \text{ و } B \text{ در } P, A \cap B = \emptyset$$

$$(۳) X = \bigcup_{A \in P} A$$

یعنی X را بتوان به‌صورت اجتماع همه‌ی مجموعه‌های در P که متمایز و از هم جدا و ناتهی هستند، نوشت.

مثال ۳.۱۶. هر مجموعه‌ی ناتهی دل‌خواه X همواره دست‌کم یک افراز بدیهی دارد که عبارت است از $P = \{\{x\}\}_{x \in X}$. همچنین $P = \{X\}$ یک افراز برای خود X است.

مثال ۳.۱۷. برای هر عدد طبیعی n یک افراز برای $\mathbb{Z}$ به n زیرمجموعه از $\mathbb{Z}$ وجود دارد که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$$

که در آن برای هر $0 \leq i \leq n-1$

$$A_i = \{x \in \mathbb{Z} \mid \text{باقیمانده تقسیم } x \text{ بر } n \text{ برابر } i \text{ باشد}\} = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \equiv i \pmod{n}\}$$

پس هر قسمت یک کلاس هم‌نهشتی به پیمانه‌ی n است و همان‌گونه که در مثال ۳.۱۲ دیدیم، تعداد این کلاس‌ها برابر n است. از طرفی چون بنابه الگوریتم تقسیم باقیمانده i در تقسیم هر عدد صحیح بر n با شرط $0 \leq i \leq n-1$ موجود و یکتاست، پس $\mathbb{Z} = \bigcup_{i=0}^{n-1} A_i$ و $A_i \cap A_j = \emptyset$ برای هر $0 \leq i \neq j \leq n-1$. پس

$$P = \{A_0 = \bar{0}, A_1 = \bar{1}, A_2 = \bar{2}, \dots, A_{n-1} = \overline{n-1}\} = \mathbb{Z}_n$$

یک افراز برای $\mathbb{Z}$ با n قسمت است. ■

فرآیندی که در مثال بالا برای یافتن یک افراز $\mathbb{Z}$ به کمک کلاس‌های هم‌ارزی رابطه‌ی $\equiv \pmod{n}$ انجام گرفت برای هر مجموعه‌ی دل‌خواه و به کمک هر رابطه‌ی هم‌ارزی دل‌خواه روی آن قابل انجام است. در واقع با توجه به مثال‌های بالا می‌توان لم زیر را بیان کرد.

لم ۳.۱۸ (ویژگی‌های کلاس‌های هم‌ارزی). فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی آن باشد. دراین‌صورت برای کلاس‌های هم‌ارزی داریم:

(۱) برای هر $x \in X$ ، $\bar{x} \neq \emptyset$

(۲) برای هر دو عنصر $x, y \in X$ و $x R y$ اگر و تنها اگر $\bar{x} = \bar{y}$

(۳) هر دو کلاس هم‌ارزی یا برابرند یا اشتراکی ندارند، یعنی، برای هر $x, y \in X$ که $\bar{x} \neq \bar{y}$ داریم، $\bar{x} \cap \bar{y} = \emptyset$

(۴) اجتماع تمامی کلاس‌های هم‌ارزی برابر با X است، $X = \bigcup_{x \in X} \bar{x}$

اثبات. (۱) چون رابطه‌ی R هم‌ارزی است، پس خاصیت بازتابی دارد، و درنتیجه برای هر $x \in X$ داریم، $x R x$ ، یعنی، $x \in \bar{x}$. پس کلاس هر عنصر دست‌کم شامل خود آن عنصر می‌باشد، یعنی، $\bar{x} \neq \emptyset$.

(۲) این قسمت همان بیانی است که در مثال هم‌ورودی‌ها داشتیم؛ این‌که هر دو هم‌ورودی، هم‌ورودی‌های یکسانی دارند و هر فرد می‌تواند نماینده‌ی ورودی خود باشد! برای اثبات ابتدا نشان می‌دهیم اگر دو عنصر با هم رابطه داشته باشند، آن‌گاه کلاس هم‌ارزی آن‌ها برابر است. فرض کنید برای دو عنصر دل‌خواه $x, y \in X$ داشته باشیم، $x R y$ و $r \in \bar{x}$. پس $x R r$ و چون R خاصیت تعدی دارد، $r R y$ ، یعنی، $r \in \bar{y}$. به‌طور مشابه هر $s \in \bar{y}$ عنصری از $\bar{x}$ است، و لذا $\bar{x} = \bar{y}$.

اثبات برعکس بنابه تعریف روشن است، زیرا بنابه اثبات قسمت (۱)، $x \in \bar{x} = \bar{y}$ و لذا $x R y$.

(۳) فرض کنید $\bar{x} \cap \bar{y} \neq \emptyset$ ، نشان می‌دهیم باید $\bar{x} = \bar{y}$. بنا به فرض عنصر مانند a در $\bar{x} \cap \bar{y}$ وجود دارد. پس داریم،

$$\left. \begin{array}{l} a \in \bar{x} \Rightarrow a R x \\ a \in \bar{y} \Rightarrow a R y \end{array} \right\} \begin{array}{l} \xRightarrow{\text{خاصیت تقارنی}} x R a \\ \xRightarrow{\text{خاصیت تعدی}} x R y \end{array}$$

پس دو عنصر با هم ارتباط دارند و بنا به قسمت (۲)، $\bar{x} = \bar{y}$.

(۴) بنابه تعریف و اثبات قسمت (۱) هر عنصر $x \in X$ در $\bar{x}$ قرار دارد و در نتیجه طبق تعریف اجتماع در $\bigcup_{x \in X} \bar{x}$ می‌باشد. همچنین هر عنصر در اجتماع نیز در دست کم یکی از کلاس‌های هم‌ارزی است که زیرمجموعه‌های X هستند. پس تساوی برقرار است. ■

به عنوان نتیجه با توجه به تعریف افراز، قضیه‌ی بسیار مهم زیر بلافاصله برقرار می‌باشد.

قضیه ۳.۱۹. مجموعه‌ی همه‌ی کلاس‌های هم‌ارزی یک رابطه‌ی هم‌ارزی مانند R روی X یک افراز برای آن می‌باشند، یعنی، $\bar{X} = \frac{X}{R}$.

آن چه اهمیت دارد این است که عکس قضیه بالا هم برقرار است. این مطلب نشان می‌دهد چگونه از یک تقسیم بندی از یک مجموعه می‌توان روی آن یک رابطه‌ی هم‌ارزی به دست آورد.

قضیه ۳.۲۰. اگر $P = \{X_i\}_{i \in I}$ یک افراز برای مجموعه‌ی X باشد، آن گاه رابطه‌ی R تعریف شده به صورت زیر روی X یک رابطه‌ی هم‌ارزی است:

برای دو عنصر $x, y \in X$ ، اگر و تنها اگر، x و y در یک بخش از افراز P قرار داشته باشند (یعنی، برای یک $i \in I$ داشته باشیم، $x, y \in X_i$)

به علاوه کلاس‌های هم‌ارزی نظیر این رابطه، همان قسمت‌های X_i از این افراز هستند. یعنی، $\frac{X}{R} = P$.

اثبات. تمرین.

رابطه‌ی R به دست آمده از قضیه ۳.۲۰ را *رابطه‌ی هم‌ارزی القا شده توسط افراز* P از X می‌گوئیم و با $\frac{X}{P}$ نمایش می‌دهیم. با این نمادگذاری بنابه دو قضیه قبل داریم:

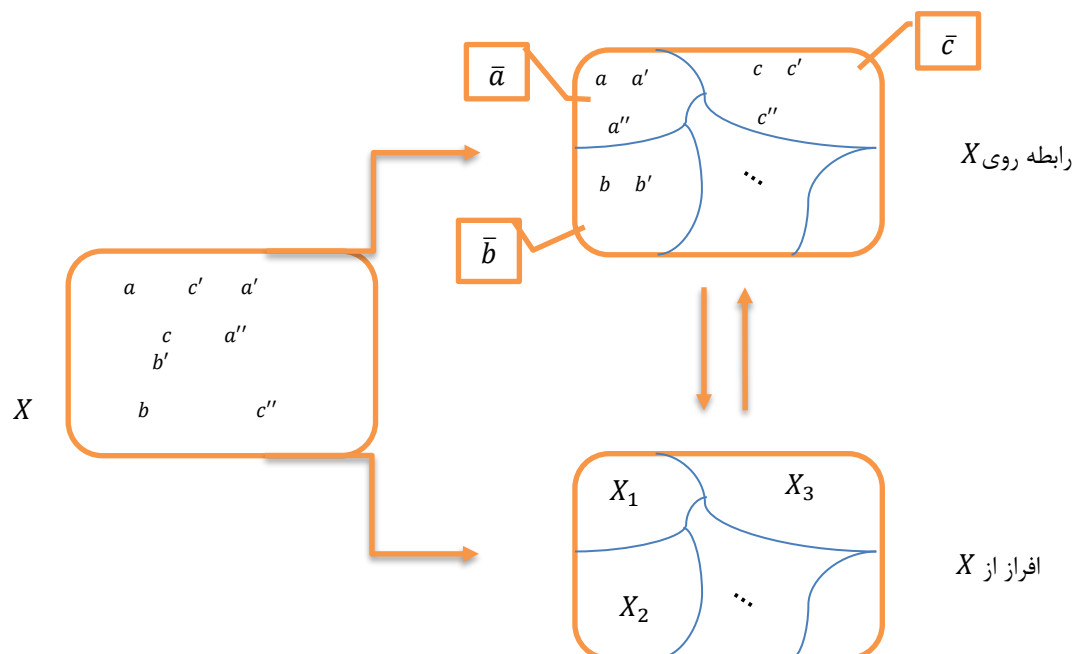
$$R = \frac{X}{P} = \frac{X}{\left(\frac{X}{R}\right)}$$

$$\frac{X}{R} = \frac{X}{\left(\frac{X}{P}\right)} = P$$

یعنی،

$$\text{افراز} = \frac{\text{مجموعه}}{\text{هم‌ارزی}} \quad \text{و} \quad \text{هم‌ارزی} = \frac{\text{مجموعه}}{\text{افراز}}$$

(در واقع از اثبات لم ۱۸.۳ می‌توان حدس زد که این رابطه باید عناصر هر قسمت از افراز را به عنوان یک کلاس هم‌ارزی در بر بگیرد.)



۲. اعمال روی روابط

از آن‌جا که هر رابطه یک مجموعه است، اجتماع و اشتراک و تقاض روابط مانند مجموعه‌ها انجام می‌شود. در این بخش به بررسی عمل ترکیب بین روابط می‌پردازیم.

۱.۲. ترکیب روابط

تعریف ۲.۱.۳. اگر $R \subseteq A \times B$ و $S \subseteq B \times C$ دو رابطه باشند، ترکیب آن دو را با $S \circ R$ نمایش می‌دهیم و رابطه‌ای است از A به C که به صورت زیر تعریف می‌شود:

برای هر $a \in A$ و برای هر $c \in C$ ، $a (S \circ R) c$ اگر و تنها اگر یک $b \in B$ موجود باشد که برای آن، $(a, b) \in R$ و $(b, c) \in S$.

بنابراین برای تشکیل یک عضو در ترکیب دو رابطه (که بنا به قرارداد تعریف بالا از راست انجام می‌شود) نیاز به عنصر واسطی هست، که مرتبط کننده‌ی یک عنصر از دامنه‌ی رابطه‌ی اول و عنصری از بُرد رابطه‌ی دوم باشد.

ترکیب یک رابطه با خودش نیز به همین ترتیب بیان می‌شود و گاهی با نماد توان نمایش داده می‌شود، مثلاً:

$$R^2 = R \circ R, R^3 = R \circ R \circ R, \dots, R^n = R^{n-1} \circ R, \dots, R^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$$

که R^∞ بستر متعدی R نامیده می‌شود.

به عنوان یک مثال ساده، اگر R رابطه‌ی پدر بودن باشد، $R^2 = R \circ R$ رابطه‌ی پدر بزرگ بودن خواهد بود!

مثال ۲۲.۳. اگر $A = \{1, 2, 3\}$ و $R = \{(1,1), (1,2), (2,3)\} \subseteq A \times A$ و $S = \{(2,2), (3,1)\} \subseteq A \times A$ دو رابطه (روی A) باشند، آن‌گاه داریم:

- $(2,3) \in R$ و $(3,1) \in S$ پس بنابه تعریف $(2,1) \in S \circ R$ (درواقع 3، عنصر واسطه بین دو رابطه است)؛

- $(1,3) \notin S \circ R$ ، زیرا برای هر $b \in A$ اگر $(1,b) \in R$ آن‌گاه $(b,3) \notin S$ (یعنی هیچ عنصر واسطه‌ی بین 1 از دامنه‌ی R و 3 از برد S وجود ندارد). به طور مشابه $(2,3) \notin S \circ R$ ؛

- اما $(2,3) \in R \circ S$ ، زیرا $(2,2) \in S$ و $(2,3) \in R$ (عنصر 2، عنصر واسطه است). پس در این مثال $R \circ S \neq S \circ R$

به عنوان تمرین و به کمک تعریف بررسی کنید $(2,1) \notin R \circ S$. همچنین بقیه‌ی عناصر $S \circ R$ و $R \circ S$ و نیز $R \circ R$ و $S \circ S$ را به دست آورید.

مثال ۲۳.۳. فرض کنید R رابطه‌ی $\equiv^2$ و S رابطه‌ی $\equiv^3$ روی $\mathbb{Z}$ باشند، در این صورت

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv^2 b\}$$

$$S = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid a \equiv^3 b\}$$

پس به عنوان نمونه $(12,10) \in R$ و $(10,1) \in S$ ، زیرا $12 \equiv^2 10$ و $10 \equiv^3 1$. پس بنابه تعریف $(12,1) \in S \circ R$ (عضو واسطه رابطه‌ها عدد 10 است). همچنین $(12,5) \in S \circ R$ ، زیرا مثلاً عدد 8 می‌تواند عنصر واسطه باشد: $(12,8) \in R$ و $(8,5) \in S$ ، چون $12 \equiv^2 8$ و $8 \equiv^3 5$ (البته برای یافتن $S \circ R$ به صورت کامل، مانند مثال قبل، نیاز به اطلاعاتی از نظریه اعداد است که موضوع بحث ما نیست، اما برای دانشجوی علاقه‌مند تمرین خوبی خواهد بود!).

قضیه ۲۴.۳. اگر R یک رابطه روی مجموعه‌ی X باشد، آن‌گاه R یک رابطه‌ی متعدی است اگر و تنها اگر $R^2 \subseteq R$.

اثبات. فرض کنید R یک رابطه‌ی متعدی باشد و $(a,b) \in R^2$ عنصری دل‌خواه باشد. در این صورت بنابه تعریف واسطه $c \in X$ وجود دارد که $(a,c) \in R$ و $(c,b) \in R$ ، یعنی، $a R c$ و $c R b$ که به همراه متعدی بودن R نتیجه می‌دهد $a R b$ ، یعنی، $(a,b) \in R$. پس $R^2 \subseteq R$.

برعکس اگر $R^2 \subseteq R$ و برای a و b در X داشته باشیم، $(a,c) \in R$ و $(c,b) \in R$ ، آن‌گاه c واسطه‌ی خواهد بود که نتیجه می‌دهد $(a,b) \in R$. اکنون چون $R^2 \subseteq R$ پس $(a,b) \in R$ پس R متعدی است. ■

۳. نگاشت

۱.۳. تعریف و مفاهیم اولیه

تعریف ۳.۲۵ (تابع یا نگاشت). فرض کنید A و B دو مجموعه باشند. در این صورت منظور از یک تابع یا نگاشت مانند f از A به B یک رابطه از A به B است (یعنی یک زیرمجموعه از $A \times B$) به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

$$D_f = A \quad (1)$$

$$(2) \text{ (شرط یکتایی تصویر) اگر } (a, b) \in f \text{ و } (a, c) \in f \text{ آن گاه } b = c$$

به اختصار، رابطه‌ی f یک تابع است هرگاه به هر عنصر از A عنصر یکتایی از B را مرتبط کند. تابع f از A به B را با $f: A \rightarrow B$ نمایش می‌دهیم و به جای نوشتن $(a, b) \in f$ یا $a f b$ می‌نویسیم، $b = f(a)$. در این حالت b را (که طبق تعریف تابع یکتاست) تصویر یا نگاره عنصر a می‌گوئیم و a را یک عنصر پیش‌تصویر یا پیش‌نگاره از b می‌نامیم.

شرط دوم تابع بودن در تعریف بالا بیان می‌کند که هر عنصر تصویر یکتایی دارد، به عبارت دیگر اگر دو عنصر برابر باشند، تصویر آن‌ها تحت یک تابع نیز باید برابر باشد. هنگامی که تابع بودن یک رابطه را نشان داده شد، اصطلاحاً می‌گوییم آن تابع خوش‌تعریف است. بنابراین بررسی خوش‌تعریف بودن یک تابع مانند f ، همان بررسی دو شرط تعریف تابع برای آن می‌باشد، به علاوه این که باید دقت کنیم تصویر هر عنصر از دامنه حتماً عنصری از هم‌دامنه باشد (یعنی، $f \subseteq A \times B$).

دامنه و برد توابع همانند رابطه‌ها تعریف می‌شود. همچنین اگرچه کلمه‌های نگاشت و تابع هم‌معنا هستند، اما کلمه‌ی نگاشت برای مباحث کلی‌تر به کار می‌رود و از کلمه‌ی تابع بیشتر در ریاضیات عمومی استفاده می‌کنیم. بنابراین از این جا به بعد نیز کلمه‌ی نگاشت را بیشتر به کار خواهیم برد.

تعریف ۳.۲۶ (نگاره و پیش‌نگاره‌ی مجموعه‌ها). اگر $f: A \rightarrow B$ یک نگاشت باشد و A' زیرمجموعه‌ای از A باشد، آن‌گاه تصویر یا نگاره‌ی A' تحت f را با $f(A')$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از مجموعه‌ی همه تصاویر عناصر A' ، یعنی،

$$f(A') = \{f(a') \mid a' \in A'\}$$

که به روشنی زیرمجموعه‌ای از تصویر یا بُرد f می‌باشد (دقت کنید که این صرفاً یک نمایش است و منظور از $f(A')$ در حالت کلی مجموعه‌ی بالاست، اما اگر خود A' عضوی از دامنه باشد باید در تعریف تصویر آن، یعنی $f(A')$ ، دقت کرد که با نماد بالا اشتباه نشود).

همچنین اگر B' زیرمجموعه‌ای از B باشد، آن‌گاه تصویر وارون یا پیش‌نگاره‌ی B' تحت f را با $f^{-1}(B')$ نمایش می‌دهیم و عبارت است از مجموعه‌ی همه‌ی عناصری از دامنه که تصویر آن‌ها در B' باشد، یعنی،

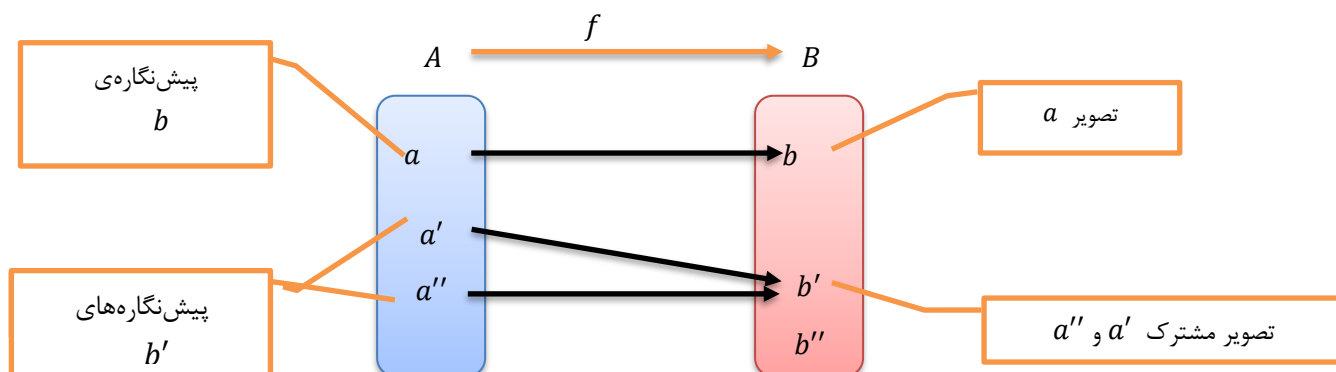
$$f^{-1}(B') = \{a \in A \mid f(a) \in B'\}$$

که به روشنی زیرمجموعه‌ای از دامنه‌ی f می‌باشد.

همچنین فرمولی که بیان کننده همه‌ی عناصر مرتبط با عناصر A باشند (یعنی همه‌ی تصاویر عناصر A) را نیز ضابطه‌ی f گوئیم.

تعریف ۳.۲۷ (هم‌دامنه و نمودار). اگر $f: A \rightarrow B$ یک نگاشت باشد، مجموعه‌ی B را هم‌دامنه‌ی f می‌نامیم (روشن است که بُرد نگاشت f زیر مجموعه‌ای از هم‌دامنه‌ی آن است، یعنی، $R_f \subseteq B$). هم‌چنین نمایش نگاشت f به صورت مجموعه‌ی $\{(a, f(a)) \mid a \in A\}$ را نمودار f گوئیم.

در یک نگاشت ممکن است، تصویر عناصر متفاوت از دامنه عنصری یکسان از بُرد باشد (یعنی برخی از عناصر بُرد پیش-تصویرهای مختلفی داشته باشند، اگرچه طبق تعریف نگاشت هر عنصر تنها یک تصویر دارد). حتی ممکن است همه‌ی عناصر دامنه به شکل یکسان به یک عنصر مشترک تصویر شوند، که در این حالت اخیر نگاشت را یک نگاشت ثابت گوئیم.



۳.۲. چند مثال و برخی از انواع از نگاشت‌ها

نکته ۳.۲۸. (۱) رابطه‌ی قطری $\Delta(X)$ روی یک مجموعه مانند X یک نگاشت است که در آن تصویر هر عنصر دامنه خود آن عنصر می‌باشد. معمولاً هنگامی که رابطه‌ی قطری را به عنوان نگاشت در نظر می‌گیریم، آن را با id_X یا I_X نمایش می‌دهیم و به آن نگاشت همانی می‌گوئیم. پس، $id_X(x) = x$ برای هر $x \in X$ ، یعنی،

$$id_X: X \rightarrow X$$

$$x \rightarrow x$$

(۲) اگر $f: A \rightarrow B$ یک نگاشت باشد، می‌توان با کوچک‌تر کردن دامنه‌ی آن نگاشتی جدید به دست آورد که ضابطه‌اش همانند قبل باشد. به بیان دقیق‌تر اگر $A' \subseteq A$ آن‌گاه $f: A' \rightarrow B$ (که از محدود کردن دامنه‌ی f به دست می‌آید) نیز یک نگاشت می‌باشد که به آن تحدید f به A' می‌گوییم و آن را با $f|_{A'}$ نمایش می‌دهیم. در برابر مفهوم تحدید نگاشت‌ها، می‌توان هر نگاشت مانند $f: A \rightarrow B$ را با بزرگ‌تر کردن دامنه‌اش به یک ابرمجموعه از A مانند X گسترش داد. به این ترتیب از روی f نگاشتی مانند $\bar{f}: X \rightarrow B$ به دست می‌آید که دامنه‌ی بزرگ‌تری دارد، اما روی A با f برابر است، یعنی، $\bar{f}|_A = f$.

(۳) اگر $\emptyset \neq A \subseteq B$ ، آن‌گاه نگاشت $i: A \rightarrow B$ با ضابطه‌ی همانی، یعنی، $i(a) = a$ ، برای هر $a \in A$ ، تابع یا نگاشت شمول نامیده می‌شود. این نگاشت، همان تحدید نگاشت همانی روی B به زیرمجموعه‌ی A از آن است، یعنی، $id_B|_A$.

(۴) برای برخی از نگاشت‌ها روی قسمت‌های مختلف دامنه فرمول‌های متفاوتی به عنوان ضابطه تعریف می‌شود. به این گونه نگاشت‌ها، چندضابطه‌ای می‌گوییم. باتوجه به شرط یکتایی تصویر در تعریف نگاشت، باید ضابطه‌های مختلف یک نگاشت

چندضابطه‌ای روی اشتراک دامنه‌هایشان مقدار یکسانی داشته باشند. هم‌چنین اجتماع دامنه‌های همه‌ی ضوابط باید با دامنه‌ی نگاشت برابر باشد تا کل دامنه تحت نگاشت پوشش داده شود (یعنی، شرط اول تابع بودن برقرار باشد). یک نگاشت چندضابطه‌ای با دامنه‌ی A را به صورت زیر می‌توان نمایش داد:

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & x \in A_1 \\ f_2(x) & x \in A_2 \\ \vdots & \\ f_n(x) & x \in A_n \end{cases}$$

که در آن،

$$A = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

و برای هر i و j بین 1 تا n و هر $x \in A_i \cap A_j$ داشته باشیم $f_i(x) = f_j(x)$.

در بخش بعد به طور دقیق تر خواهیم دید که هر نگاشت چندضابطه‌ای با تعریف بالا درواقع اجتماعی از چند نگاشت است.

به عنوان مثال نگاشت زیر، موسوم به تابع مشخصه‌ی A در X ، یک تابع دوضابطه‌ایست که به کمک آن می‌توان عناصر A را از بین عناصر X مشخص کرد.

$$\chi_A: X \rightarrow \{0,1\}$$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

برای هر $x \in X$

(۵) اگر A و B دو مجموعه‌ی ناتهی باشند، روابط زیر که موسوم به نگاشت‌های تصویر هستند، تابع می‌باشند:

$$\begin{aligned} \pi_1: A \times B &\rightarrow A && \text{نگاشت تصویر به مؤلفه‌ی اول:} \\ \pi_1(a,b) &= a \\ \pi_2: A \times B &\rightarrow B && \text{نگاشت تصویر به مؤلفه‌ی دوم:} \\ \pi_2(a,b) &= b \end{aligned}$$

هم‌چنین اگر R یک رابطه روی مجموعه‌ی A باشد، آنگاه π با که به هر عنصر A را با کلاس آن نسبت به رابطه‌ی R مرتبط می‌کند، یک تابع است و نگاشت کانونی نامیده می‌شود:

$$\begin{aligned} \pi: A &\rightarrow \bar{A} = \frac{A}{R} \\ \pi(a) &= \bar{a} \\ &\text{برای هر } a \in A \end{aligned}$$

(۶) از معروف‌ترین توابعی که می‌شناسیم توابع جمع و ضرب اعداد هستند:

$$+ : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ +(a,b) = a + b$$

$$\times : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ \times (a,b) = a \times b$$

(برای هر دو عدد حقیقی a و b). دقت کنید که به جای نمادهای همیشگی توابع که حروف بودند این بار از دو نماد $+$ و $\times$ برای نام گذاری این دو تابع استفاده کرده ایم.

توجه کنید که در عمل جمع اعداد، برای هر $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ اولاً تصویرها وجود دارند و در $\mathbb{R}$ هستند و ثانیاً برای هر دو عنصر برابر مانند $(x,y) = (a,b)$ در $\mathbb{R}^2$ ، تصویرها یکسان است، یعنی، $+(x,y) = x + y = a + b$ ، پس این عمل دو ویژگی تابع بودن را دارد. به طور مشابه عمل ضرب اعداد نیز یک تابع است. در تمرین ۲۸ در آخر فصل می بینیم که این توابع حالت خاصی از توابع هستند که به اعمال چندتایی نیز موسومند.

(۷) رابطه ی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با ضابطه ی زیر یک تابع است:

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$$

زیرا، اولاً برای هر عنصر $\mathbb{R}^2$ تعریف می شود، یعنی، $D_f = \mathbb{R}^2$. ثانیاً برای هر دو عنصر برابر مانند $(x,y) = (a,b)$ در $\mathbb{R}^2$ ، تصویرها یکسان است، یعنی، $f(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2) = (a^2 + b^2, a^2 - b^2) = f(a,b)$ (می توانید توضیح دهید چرا!!). برای تمرین مجموعه های $f(1,0)$ و $f^{-1}(\{(2,0), (0,0)\})$ و $f^{-1}(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\})$ را بیابید.

۳.۳. نگاشت های یک به یک و پوشا

تعریف ۳.۲۹. نگاشت $f: A \rightarrow B$ را یک به یک گوئیم، هرگاه هر عضو در بُرد f تصویر تنها یک عضو از دامنه باشد، یعنی،

$$\forall a, a' \in A, \quad (f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$$

یا به طور معادل هر دو عنصر متفاوت از دامنه، تصویرهای متفاوتی داشته باشند، یعنی،

$$\forall a, a' \in A, \quad (a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'))$$

نگاشت یک به یک را با نماد $1-1$ هم نمایش می دهیم و به آن اینژکشن هم می گوئیم.

تعریف ۳.۳۰. نگاشت $f: A \rightarrow B$ را پوشا گوئیم، هرگاه هر عضو در هم دامنه ی f تصویر یک عضو از دامنه باشد، به عبارت دیگر هم دامنه ی آن با بُردش برابر باشد، یعنی،

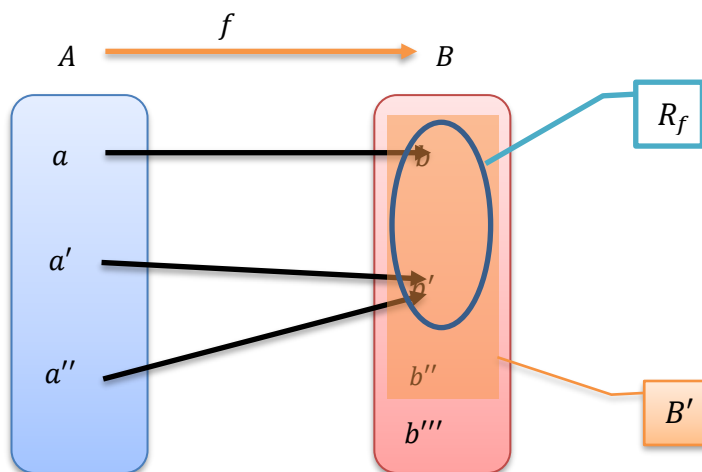
$$\forall b \in B \quad \exists a \in A \quad b = f(a)$$

یا

$$R_f = f(A) = B$$

یک نگاشت پوشا را بُرو یا سورجکشن هم می گوئیم.

گزاره ۳.۳۱. اگر $f: A \rightarrow B$ یک نگاشت باشد و $R_f \subseteq B' \subseteq B$ (یعنی B' شامل تصویر f باشد) آن گاه $f: A \rightarrow B'$ نیز نگاشت است.



بنا به گزاره‌ی بالا اگر نگاشتی پوشا نباشد، می‌توان هم‌دامنه‌ی آن را کوچک‌تر کرد (عناصرش را کاهش داد) تا برابر با برد نگاشت شود و نگاشتی پوشا به‌دست آورد. پس هر نگاشتی را با این روش می‌توان پوشا در نظر گرفت. به‌همین دلیل تاکنون کمتر درباره‌ی توابع، صفت پوشا را شنیده‌اید!

تعریف ۳.۲۲. نگاشتی که هم یک‌به‌یک و هم پوشا باشد را نگاشت دوسویی یا هم‌ارزی یا یک تناظر یک‌به‌یک (دوسویی) می‌گوییم (هم‌چنین به‌ویژه در درس‌های جبر و ترکیبیات به نگاشت‌های دوسویی از یک مجموعه به خودش یک جایگشت از عناصر آن مجموعه نیز می‌گوییم). اگر $f: A \rightarrow B$ یک تناظر دوسویی باشد، A و B را متناظر یا هم‌ارز می‌گوییم و با $A \equiv B$ نمایش می‌دهیم.

مثال ۳.۲۳. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه‌ی $f(x) = x^2$ ، برای هر $x \in \mathbb{R}$ تابعی است که یک‌به‌یک نمی‌باشد؛ زیرا از تساوی $f(x) = f(x')$ نمی‌توان لزوماً نتیجه گرفت $x = x'$ به‌عنوان مثال، $f(1) = 1 = f(-1)$ اما $1 \neq -1$. هم‌چنین f پوشا هم نیست؛ چون تصاویر x^2 از عناصر دامنه همیشه مثبت یا صفر هستند و کل اعداد حقیقی را نمی‌پوشاند، مثلاً -1 تصویر هیچ عنصری از دامنه نیست، یعنی، $x^2 \neq -1$ برای هر x در دامنه‌ی f (پس $R_f \neq \mathbb{R}$). اما با ایجاد تغییر در دامنه یا هم‌دامنه‌ی f (و حتی بدون تغییر دادن ضابطه‌ی آن) توابعی به‌صورت زیر می‌توان به‌دست آورد که یک‌به‌یک یا پوشا باشند (این مطلب را بررسی کنید).

$$f_1: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow x^2$$

$$f_2: \mathbb{R}^{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \\ x \rightarrow x^2$$

$$f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \\ x \rightarrow x^2$$

۴.۳. تساوی نگاشت‌ها و اعمال روی آن‌ها

تعریف ۳.۳۴. دو نگاشت $f: A \rightarrow B$ و $g: A' \rightarrow B'$ را مساوی گوئیم هرگاه دامنه‌ی برابر داشته باشند و تصاویر هر عنصر از این دامنه تحت هردوی آن‌ها یکسان باشند، یعنی، $A = A'$ و $f(a) = g(a)$ ، برای هر $a \in A$.

دقت کنید که شرط تساوی دامنه‌ها هم لازم است، یعنی، دو تابع با ضابطه‌های یکسان ممکن است برابر نباشند! مثلاً تابع با ضابطه‌ی $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ با تابع $g(x) = x+1$ روی اعداد حقیقی برابر نیست (بررسی کنید چرا و با چه شرطی برابرند).

اعمال روی نگاشت‌ها همان اعمال روی رابطه‌ها می‌باشند که در بخش ۲ از همین فصل معرفی شدند، البته در تعریف آن‌ها ممکن است شرایطی را اضافه کنیم تا پس از انجام هر عمل، رابطه‌ی حاصل نگاشت نیز باشد. به‌عنوان مثال قضیه بعد شرایطی را بیان می‌کند که تحت آن‌ها اجتماع نگاشت‌ها به‌عنوان یک رابطه، نگاشت نیز باشد.

قضیه ۳.۳۵. فرض کنید $f: A \rightarrow B$ و $g: A' \rightarrow B'$ دو نگاشت باشند به‌طوری‌که برای هر $x \in A \cap A'$ داشته باشیم، $f(x) = g(x)$. در این صورت $f \cup g: A \cup A' \rightarrow B \cup B'$ یک نگاشت است.

اثبات. تمرین.

تعریف ۳.۳۶ (اجتماع نگاشت‌ها). همان‌گونه که در تعریف نگاشت چندضابطه‌ای دیدیم، شرایط قضیه بالا در این نگاشت‌ها برقرار است. پس هر نگاشت چندضابطه‌ای اجتماعی از چند نگاشت است و برعکس، درواقع با نمادهای قضیه قبل داریم:

$$f \cup g: A \cup A' \rightarrow B \cup B'$$

$$(f \cup g)(x) = \begin{cases} f(x) & x \in A \\ g(x) & x \in A' \end{cases}$$

که چون روی اشتراک دامنه‌ها تصاویر دو ضابطه یکسان است، یک نگاشت می‌باشد.

تعریف ۳.۳۷ (ترکیب نگاشت‌ها). اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ دو نگاشت باشند، به کمک مفهوم ترکیب رابطه‌ها می‌توان نگاشت جدید با این دنگاشت تولید کرد که به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

$$a \rightarrow (g \circ f)(a) = g(f(a))$$

برای هر $a \in A$

درواقع $f(a)$ واسطه برای ارتباط a و $(g \circ f)(a)$ است:

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

$$a \xrightarrow{f} f(a) = b \xrightarrow{g} g(b) = g(f(a))$$

این‌گونه ترکیب را ترکیب از سمت راست می‌گوئیم، یعنی ابتدا نگاشتی که سمت راست نوشته شده را اثر می‌دهیم و سپس نگاشت دوم از سمت راست را (در برخی منابع ممکن است ترکیب از سمت چپ تعریف شود که البته همه‌ی خواص به‌طور مشابه برای آن برقرارند).

اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: A' \rightarrow B'$ دو نگاشت باشند، برای این که بتوان $g \circ f$ را تعریف کرد، باید $f(A) \subseteq A'$ تا بتوان برای هر عنصر a از A واسطی یافت تا آن عنصر را به یک عنصر یکتا از B' به شکل $(g \circ f)(a)$ مرتبط کند. در واقع:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

با توجه به این تعاریف می توان فهمید که ترکیب نگاشت ها خاصیت جابه جایی ندارد، یعنی برای دو نگاشت f و g که ترکیب آن ها تعریف شده باشد، ممکن است، $f \circ g \neq g \circ f$. به عنوان مثال ترکیبات تابع $f(x) = \cos x$ و $g(x) = \sin x$ روی اعداد حقیقی را بررسی کنید.

اما ترکیب نگاشت ها خاصیت شرکت پذیری دارد که این امکان را می دهد که بتوان بیش از دو نگاشت را هم با هم ترکیب کرد. در واقع قضیه زیر را داریم.

قضیه ۳۸.۳. اگر $f: A \rightarrow B$ و $g: A' \rightarrow B'$ و $h: A'' \rightarrow B''$ سه نگاشت باشند که $f(A) \subseteq A'$ و $g(A') \subseteq A''$ آن گاه داریم،

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

اثبات. تمرین.

قضیه ۳۹.۳. فرض کنید $f: A \rightarrow B$ و $g: A' \rightarrow B'$ دو نگاشت باشند که $f(A) \subseteq A'$. در این صورت،

(۱) اگر f و g یک به یک باشند آن گاه $g \circ f$ نیز یک به یک است.

(۲) اگر f و g پوشا باشند آن گاه $g \circ f$ نیز پوشا است.

(۳) اگر f و g دوسویی باشند آن گاه $g \circ f$ نیز دوسویی است.

اثبات. تمرین (حتماً بررسی کنید!).

تعریف ۴۰.۳ (نگاشت وارون). گوئیم نگاشت $f: A \rightarrow B$ وارون یا معکوس دارد (وارون پذیر است) هرگاه نگاشتی مانند $g: B \rightarrow A$ موجود باشد، به طوری که

$$f \circ g = id_B \quad \text{و} \quad g \circ f = id_A$$

در این حالت می گوئیم f و g وارون یک دیگرند. می توان دید که همه ی نگاشت ها لزوماً وارون ندارند (ببینید!). همچنین می توان ثابت کرد که وارون یک نگاشت در صورت وجود یکتاست (ثابت کنید!). بنابراین وارون یکتای نگاشت f را در صورت وجود نام گذاری می کنیم و آن را با f^{-1} نمایش می دهیم. این نماد را قبلاً در تعریف تصویر وارون یک مجموعه دیده بودیم، دقت کنید که یک نگاشت ممکن است وارون نداشته باشد اما تصویر وارون تعدادی از عناصر هم دامنه ناتهی باشد، پس این دو مفهوم تعاریف جداگانه ای دارند.

دقت کنید که با توجه به تعریف داریم:

$$f(x) = y \Leftrightarrow f^{-1}(y) = x$$

قضیه مهم بعدی شرایط وجود وارون یک نگاشت را بیان می‌کند.

قضیه ۴۱.۳. نگاشت $f: A \rightarrow B$ وارون دارد اگر و تنها اگر f یک‌به‌یک و پوشا باشد. همچنین اگر f وارون داشته باشد، f^{-1} نیز یک‌به‌یک و پوشاست.

اثبات. تمرین.

شاید قبلاً شرط وارون‌پذیری نگاشت را فقط یک‌به‌یک بودن آن در نظر می‌گرفتید! دلیلش این بود که همان‌طور که گفتیم می‌توانیم یک نگاشت را اگر پوشا نباشد با کوچک کردن هم‌دامنه‌اش پوشا در نظر بگیریم، پس شرط پوشایی را بدون این‌که بگوییم فرض شده در نظر می‌گرفتیم. در تمرین ۲۲ در آخر فصل این شرایط به‌صورت دقیق‌تری برای وجود وارون بیان شده‌اند.

۵.۳. برخی خواص نگاشت‌ها و تصویر وارون آن‌ها

قضیه ۴۲.۳. فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک نگاشت باشد. در این صورت داریم:

$$f(\emptyset) = \emptyset \quad (۱)$$

$$(۲) \text{ برای هر } A_1 \subseteq A_2 \subseteq A, f(A_1) \subseteq f(A_2).$$

$$(۳) \text{ برای هر } B_1 \subseteq B_2 \subseteq B, f^{-1}(B_1) \subseteq f^{-1}(B_2).$$

(۴) برای هر خانواده‌ی دل‌خواه از زیرمجموعه‌های A مانند $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

هم‌چنین اگر f یک‌به‌یک باشد، رابطه‌ی شمول دوم به تساوی تبدیل می‌شود.

(۵) برای هر خانواده‌ی دل‌خواه از زیرمجموعه‌های B مانند $\mathcal{G} = \{B_i\}_{i \in I}$

$$f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} B_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(B_i)$$

اثبات. موارد (۱) و (۲) و (۳) ساده هستند و به‌عنوان تمرین واگذار می‌شوند. اثبات قسمت‌های (۴) و (۵) نیز مشابه است و لذا (۴) را به‌طور خلاصه بیان می‌کنیم.

(۴). برای هر y دل‌خواه داریم:

$$y \in f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) \xLeftrightarrow{\text{تعریف تصویر}} \exists a \in \bigcup_{i \in I} A_i \quad y = f(a)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} \exists i \in I \quad a \in A_i \text{ و } y = f(a) \quad \text{برای یک } a.$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف تصویر}} \exists i \in I \quad y \in f(A_i)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اجتماع}} y \in \bigcup_{i \in I} f(A_i)$$

چون همه‌ی روابط بالا به صورت دوشرطی برقرارند، پس هر طرف تساوی مورد نظر زیرمجموعه‌ی طرف دیگر است و لذا،

$$f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i).$$

برای اثبات قسمت دوم به طور مشابه برای هر y دل خواه داریم:

$$y \in f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \xLeftrightarrow{\text{تعریف تصویر}} \exists a \in \bigcap_{i \in I} A_i \quad y = f(a)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} \forall i \in I \quad a \in A_i \text{ و } y = f(a) \quad \text{برای یک } a.$$

$$\xRightarrow{\text{تعریف تصویر}} \forall i \in I \quad y \in f(A_i)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{تعریف اشتراک}} y \in \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

دقت کنید که در فرآیند بالا همه‌ی گزاره‌ها به جز خط سوم دوشرطی هستند. پس داریم:

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) \subseteq \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

در مورد عکس گزاره شرطی خط سوم، دقت کنید که اگر برای هر یک از A_i ها داشته باشیم، $y \in f(A_i)$ ، آن گاه برای هر $i \in I$ عنصر $a_i \in A_i$ موجود است که $y = f(a_i)$ که a_i با بقیه‌ی a_j ها ممکن است برابر نباشد، حال آن که در خط دوم برای همه‌ی آن ها a ، یکسان در نظر گرفته شده است. البته اگر f یک به یک باشد، باید همه‌ی a_i ها برابر باشند (بررسی کنید چرا!) که در این حالت این گزاره نیز دوشرطی خواهد بود و تساوی برقرار می شود. ■

۳.۶. بازگشت به تعریف حاصل ضرب مجموعه‌ها

همان‌طور که در تعریف حاصل ضرب دکارتی در بخش ۲.۴ از فصل ۲ گفتیم، اگر A یک مجموعه باشد و $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ، A^n مجموعه‌ی تمام n -تایی‌های مرتب از عناصر A است. اکنون مجموعه‌ای معادل برای A^n به کمک مفهوم نگاشت بیان می‌کنیم که در بسیاری از مسائل راه‌گشا خواهد بود. A^n با مجموعه‌ی تمام نگاشت‌ها از یک مجموعه‌ی n -عضوی دلخواه، مانند $\{1, 2, \dots, n\}$ به A در تناظر یک‌به‌یک است، یعنی،

$$A^n \equiv \{g \mid g: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A \text{ یک نگاشت باشد}\}$$

در واقع به هر n -تایی مرتب $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in A^n$ نگاشتی به فرم زیر نظیر می‌شود:

$$\begin{aligned} g: \{1, 2, \dots, n\} &\rightarrow A \\ g(k) &= a_k \end{aligned}$$

یعنی هر عدد طبیعی k به k -امین مؤلفه از $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ تصویر شود. برعکس برای هر نگاشت به فرم بالا n -تایی مرتب $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in A^n$ وجود دارد (به عنوان مثال تمرین‌های ۲۵ و ۲۶ از همین فصل را ببینید).

بحث بالا را در حالت کلی‌تر برای حاصل ضرب دکارتی یک خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌ها می‌توان بیان کرد (تعمیم داد). ابتدا تناظر بین چندتایی‌های مرتب و توابع را برای تعداد متناهی از مجموعه‌ها بیان می‌کنیم. اگر

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n$$

آن‌گاه نظیر این n -تایی مرتب تابع زیر را می‌توان در نظر گرفت و برعکس برای هر تابع شبیه تابع زیر یک n -تایی مرتب وجود دارد:

$$\begin{aligned} g: \{1, 2, \dots, n\} &\rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \\ g(k) &= a_k \end{aligned}$$

به طوری که $a_k \in A_k$ (به عنوان تمرین خوشتعریفی این تابع را بررسی کنید). بنابراین داریم:

$$\begin{aligned} A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots \times A_n &= \{(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i \in \{1, 2, \dots, n\}\} \\ &\equiv \{g \mid g: \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n \text{ تابعیست که برای هر } k, g(k) \in A_k\} \end{aligned}$$

به روشی مشابه برای هر خانواده‌ی دلخواه از مجموعه‌ها مانند $\{A_i\}_{i \in I}$ تناظر دوسویی زیر را داریم:

$$\begin{aligned} \prod_{i \in I} A_i &= \{(a_i)_{i \in I} \mid a_i \in A_i, i \in I \text{ برای هر } i\} \\ &\equiv \{g \mid g: I \rightarrow \bigcup_{i \in I} A_i \text{ یک نگاشت باشد که برای هر } i, g(i) \in A_i\} \end{aligned}$$

این تناظرها را نیز در تمرین ۲۵ و ۲۶ از همین فصل بررسی کنید.

۴. تمرین‌ها

(۱) فرض کنید $\sim$ رابطه‌ای تعریف شده روی مجموعه‌ای اعداد طبیعی به صورت زیر باشد:

$$a \sim b \text{ اگر و تنها اگر } a + b \text{ زوج باشد.}$$

آیا $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است؟ اگر هست افزای که برای $\mathbb{N}$ ایجاد می‌کند را بیابید.

(۲) فرض کنید $\mathfrak{R}$ رابطه‌ای تعریف شده بصورت زیر باشد:

$$\mathfrak{R} \subseteq (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) \times (\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})) \text{ و } (a, b) \mathfrak{R} (c, d) \text{ اگر و تنها اگر } ad = cb.$$

الف) نشان دهید $\mathfrak{R}$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است.

ب) کلاس هم‌ارزی عناصر $(1, 3)$ و $(8, 4)$ و $(3, 3)$ را تحت این رابطه مشخص کنید.

ج) آیا می‌توانید بگوئید این رابطه چه مجموعه‌هایی را توصیف می‌کند (در واقع $\frac{\mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})}{\mathfrak{R}}$ با چه مجموعه‌ی معروفی هم‌ارز است؟)

(۳) برای یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی دل‌خواه یک رابطه‌ی هم‌ارزی مثال بزنید (شاید راه حل ساده‌تر این باشد که ابتدا یک افراز برای آن در نظر بگیریم!).

(۴) مجموعه‌ی $A = \{1, 2, 3\}$ را در نظر بگیرید. روی $\mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$ رابطه‌ی $\sim$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای هر دو زیرمجموعه‌ی ناتهی X و Y از A ، $X \sim Y$ اگر و تنها اگر کوچکترین عنصر X با کوچکترین عنصر Y برابر باشد.

بررسی کنید که آیا $\sim$ یک رابطه‌ی هم‌ارزی است و اگر هست، افراز نظیر این رابطه را بدست آورید.

(۵) بررسی کنید آیا مجموعه‌ی $\{2, 3, 4, 6, 18, 24\}$ با رابطه‌ی شمردن (عادکردن) اعداد یک مجموعه‌ی به‌طور جزئی (و کلی) مرتب است؟

(۶) آیا هر رابطه که دوتا از ویژگی‌های بازتابی، تقارنی (یا پادتقارنی) و تعدی را داشته باشد، ویژگی سوم را هم خواهد داشت؟ برای هر حالت که این گزاره درست نمی‌باشد یک مثال بزنید.

(۷) ثابت کنید، اگر R یک رابطه‌ی هم‌ارزی روی مجموعه‌ی A باشد، آن‌گاه R^{-1} هم یک رابطه‌ی هم‌ارزی است. آیا این مطلب برای رابطه‌ی ترتیب جزئی و کلی هم برقرار است؟

(۸) چه تعداد رابطه با خاصیت بازتابی روی یک مجموعه‌ی n عضوی می‌توان تعریف کرد؟ آیا با هر یک از خاصیت‌های تقارنی یا پادتقارنی یا ترابایی و هم‌ارزی هم می‌توانید تعداد روابط را به دست آورید؟ آیا می‌توانید تعداد افرازهای ممکن برای یک مجموعه‌ی n عضوی را بیابید؟ (در این باره پژوهش کنید!)

(۹) فرض کنید A یک مجموعه‌ی m عضوی و B یک مجموعه‌ی n عضوی باشد. چه تعداد نگاشت از A به B می‌توان تعریف کرد؟ چه تعداد از این نگاشت‌ها یک‌به‌یک هستند؟ چه تعداد از آن‌ها دوسویی هستند؟ (در هر مورد شرایط لازم برای

m و n را در نظر بگیرید؛ مثلاً اینکه در حالت نگاشت دوسویی خود به خود باید $m = n$) تعداد اخیر چه ارتباطی با تعداد جایگشت‌های n شیء دارد و چرا؟ آیا می‌توانید تعداد نگاشت‌های پوشا از A به B را به دست آورید؟ (در این باره پژوهش کنید!)

(۱۰) فرض کنید R یک رابطه‌ی دل‌خواه روی مجموعه‌ی X باشد. در این صورت نشان دهید:

الف) $R \cup \Delta(X)$ کوچک‌ترین رابطه‌ی بازتابی روی X و شامل R است (این رابطه را بستر انعکاسی یا بازتابی R گویند).

ب) $R \cup R^{-1}$ کوچک‌ترین رابطه‌ی متقارن روی X و شامل R است (این رابطه را بستر تقارنی R گویند).

ج) $R^\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ کوچک‌ترین رابطه‌ی بازتابی روی X و شامل R است (این رابطه را بستر متعدی یا ترایی R گویند).

د) هر سه بستر بالا را برای رابطه‌ی R از مثال ۳.۲۲ به دست آورید.

(۱۱) فرض کنید R و S دو رابطه‌ی دل‌خواه باشند. در این صورت نشان دهید، $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$.

(این تساوی به قاعده‌ی کفش و جوراب موسوم است. برای این که علت این نام‌گذاری را بدانید به این فکر کنید که عکسِ عمل پوشیدن جوراب و سپس کفش چیست!)

(۱۲) فرض کنید R یک رابطه روی A باشد که همزمان هم متقارن و هم پادمتقارن است. نشان دهید $R \subseteq \Delta(A)$. پس یک رابطه‌ی هم‌ارزی غیر قطری ترتیب جزئی نخواهد بود، یعنی $R \subseteq \Delta(A)$.

(۱۳) فرض کنید $f: A \rightarrow A$ یک نگاشت باشد. اگر $f \subseteq A \times A$ به عنوان یک رابطه در نظر گرفته شود (هر تابع یک رابطه است) نشان دهید:

الف) f ویژگی بازتابی را دارد اگر و تنها اگر f تابع همانی باشد.

ب) $f \circ f = f$ ویژگی تعدی را دارد اگر و تنها اگر f باشد.

ج) قسمت (ب) را با قضیه ۳.۲۴ در مورد رابطه‌ها در حالت کلی مقایسه کنید.

(۱۴) فرض کنید A و B دو زیرمجموعه از مجموعه‌ی X باشند. ضابطه‌های توابع $\chi_{A \cap B}$ و $\chi_{A \cup B}$ و χ_{A-B} و $\chi_{A \Delta B}$ را نوشته و تلاش کنید ارتباطی بین آن‌ها و توابع χ_A و χ_B به دست آورید.

(۱۵) آیا می‌توانید یک تک ضابطه برای نگاشت دوضابطه‌ای $\chi_{\mathbb{Z}}$ روی $[0,1) - \mathbb{R}$ بیابید؟ روی $\mathbb{R}$ چطور (تلاش کنید از نگاشت جزء صحیح و خواص آن که در ریاضی عمومی دیده‌اید استفاده کنید!)

(۱۶) برای تابع نکته‌ی ۳.۲۸ (۷)، یک به یک و پوشا بودن بررسی کنید. اگر لازم است چه شرایطی می‌توان روی این تابع گذاشت تا یک به یک یا پوشا باشد؟

(۱۷) آیا رابطه‌های داده شده با ضابطه‌های زیر نگاشت یک‌به‌یک یا پوشا هستند؟ با اطلاعات ریاضی عمومی بررسی کنید هرکدام (اگر لازم است) با چه شرایطی روی دامنه یا هم‌دامنه ممکن است تبدیل به یک تابع یک‌به‌یک یا پوشا شود. آیا می‌توانید ترکیب‌های این دو تابع را به‌دست آورید؟

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ f(x, y) &= (r, \theta) \end{aligned} \quad \text{(الف)}$$

که در آن:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ g(r, \theta) &= (x, y) \end{aligned} \quad \text{(ب)}$$

که در آن:

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \\ y = r \cos \theta \end{cases}$$

(این دو رابطه همان تبدیل مختصات دکارتی به قطبی است که در فیزیک عمومی و ریاضی عمومی دیده‌اید.)

(۱۸) تابع $f: A \rightarrow A$ و $X \subseteq A$ را در نظر بگیرید. X را یک زیرمجموعه‌ی ناوردا یا پایا تحت f می‌نامیم هرگاه $f(X) \subseteq X$.

(الف) نشان دهید مجموعه‌ی اعداد فرد تحت تابع زیر پایاست اما مجموعه‌ی اعداد زوج تحت این تابع پایا نیست.

$$\begin{aligned} f: \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ f(n) &= 2n + 1 \end{aligned}$$

برای هر $n \in \mathbb{N}$

(ب) تابعی غیرهمانی روی اعداد طبیعی بیابید که تحت آن مجموعه‌ی اعداد مضرب ۳ پایا باشد.

(ج) آیا می‌توانید مجموعه‌ای بیابید که تحت تابع زیر پایا باشد (تلاش کنید بیابید!)?

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ g(x) &= \sin x \end{aligned}$$

برای هر $x \in \mathbb{R}$

(۱۹) آیا می‌توانید تابعی دوسویی بین مجموعه‌ی اعداد طبیعی، $\mathbb{N}$ ، و مجموعه‌ی اعداد صحیح، $\mathbb{Z}$ ، بیابید؟ بین $\mathbb{Z}$ و مجموعه‌ی اعداد گویا، $\mathbb{Q}$ ، چطور؟ تابعی دوسویی بین مجموعه‌ی اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ ، و بازه‌ی $(0, 1]$ هم به‌دست آورید.

آیا تابعی دوسویی بین $\mathbb{N}$ و $\mathbb{R}$ وجود دارد؟ چرا (در مورد این موضوع پژوهش و جستجو کنید، اگرچه در بخش‌های بعدی در این باره مطالبی خواهیم دید)?

(۲۰) فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک نگاشت باشد. در این صورت اگر f یک به یک باشد، برای هر خانواده‌ی دلخواه از زیرمجموعه‌های A مانند $\mathcal{F} = \{A_i\}_{i \in I}$ داریم:

$$f\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f(A_i)$$

با یک مثال بررسی کنید که تساوی در حالت کلی برقرار نمی‌باشد (جهت یادآوری قضیه ۳. ۴۲ (۴) را ببینید!).

(۲۱) فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک نگاشت دلخواه باشد و A' و A'' دو زیرمجموعه از A و همچنین B' و B'' دو زیرمجموعه از B باشند. در این صورت:

الف) نشان دهید $f^{-1}(B' - B'') = f^{-1}(B') - f^{-1}(B'')$ و از آن نتیجه بگیرید برای هر $Y \subseteq B$ داریم،

$$f^{-1}(Y^c) = f^{-1}(Y)^c.$$

ب) بررسی کنید آیا $f(A' - A'') \subseteq f(A') - f(A'')$ ؟ چرا؟ آیا با شرط یک به یک بودن f تساوی برقرار است؟ برعکس اگر برای هر دو زیرمجموعه A' و A'' از A اگر $f(A' - A'') = f(A') - f(A'')$ آن گاه آیا می‌توان نتیجه گرفت که f یک به یک است؟ بررسی کنید.

(۲۲) گوییم نگاشت $f: A \rightarrow B$ وارون یا معکوس راست دارد هرگاه نگاشتی مانند $g: B \rightarrow A$ موجود باشد، به طوری-که

$$f \circ g = id_B$$

(یعنی ترکیب g از راست با f همانی شود). به طور مشابه نگاشت $f: A \rightarrow B$ را دارای وارون یا معکوس چپ گوییم هرگاه نگاشتی مانند $h: B \rightarrow A$ موجود باشد که،

$$h \circ f = id_A$$

(یعنی ترکیب h از چپ با f همانی شود). نشان دهید:

الف) اگر نگاشت f دارای وارون چپ و راست باشد، آن گاه وارون چپ و راست آن برابرند و لذا f وارون پذیر است.

ب) نگاشت f دارای وارون چپ است اگر و تنها اگر نگاشت f یک به یک باشد.

ج) نگاشت f دارای وارون راست است اگر و تنها اگر نگاشت f پوشا باشد.

د) قسمت الف) را به کمک ب) و ج) ثابت کنید.

(۲۳) فرض کنید $f: A \rightarrow B$ و $g: C \rightarrow D$ دو نگاشت باشند و $f \circ g$ تعریف شده باشد.

الف) اگر $f \circ g$ یک به یک (یا پوشا) باشد، آن گاه آیا می‌توان گفت که هر کدام از f یا g نیز یک به یک (یا پوشا) است؟

(ب) اگر g پوشا و $f \circ g$ دوسویی باشد، آن گاه نشان دهید هر دو نگاشت f و g دوسویی هستند. همچنین با یک مثال نشان دهید که شرط پوشایی g لازم است (یعنی نمی توان آن را از فرض حذف کرد).

(۲۴) فرض کنید $f: A \rightarrow B$ یک تابع باشد و A و B دو مجموعه‌ی متناهی با تعداد عضو یکسان باشند (مثلاً هر دو n عضوی باشند). در این صورت f یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر f پوشا باشد.

(۲۵) به کمک تعریف معادل برای حاصل ضرب دکارتی A در خودش برحسب توابع، مجموعه‌ی A^0 را بیابید. همچنین مجموعه‌ی توابع هم‌ارز با A^2 را برای $A = \{a, b, c\}$ به دست آورید و توضیح دهید که هر نگاشت نظیر کدام عنصر از A^2 است.

(۲۶) اگر برای هر $k \in \mathbb{N}$ داشته باشیم، $A_k = [-1/k, 1/k]$ آن گاه مجموعه‌ی توابع متناظر با

$$\prod_{k \in \mathbb{N}} A_k$$

را بیابید (می‌توانید از تمرین ۴۹ فصل ۲ هم کمک بگیرید).

(۲۷) فرض کنید A یک مجموعه‌ی ناتهی باشد. هر تابع مانند $f: A^n \rightarrow A$ را یک عمل n -تایی روی A گوئیم که به هر n -تایی از عناصر A یک عنصر یکتا از A را نظیر می‌کند. به عنوان مثال توابع جمع و ضرب تعریف شده در نکته ۳. ۲۸ (۶)، اعمالی دوتایی روی $\mathbb{R}$ هستند. بررسی کنید هر یک از روابط زیر عمل دوتایی می‌باشند یا خیر.

(الف)

$$\begin{aligned} - : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto x - y \\ &\text{(عمل تفریق دو عدد)} \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \min : \mathbb{N} \times \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ (x, y) &\mapsto \min\{x, y\} \\ &\text{(مینیمم دو عدد)} \end{aligned}$$

(ج)

$$\begin{aligned} \oplus : \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n &\rightarrow \mathbb{Z}_n \\ \bar{x} \oplus \bar{y} &= \overline{x + y} \\ &\text{(جمع دو عدد به پیمانه‌ی } n) \end{aligned}$$

(د)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x + y - xy \end{aligned}$$

(۲۸) الف) با توجه به تعریف عمل چند تایی در تمرین قبل، آیا می‌توانید یک مجموعه‌ی ۲ عضوی از اعداد حقیقی یا مختلط بیابید که عمل ضرب اعداد روی آن یک عمل دوتایی باشد؟ مجموعه با ۳ و ۵ عضو چطور (دقت کنید که عمل ضرب اعداد به عنوان یک رابطه روی مجموعه‌های اعداد خاصیت یکتایی تصویر را دارد، پس برای اینکه روی یک مجموعه تابع و در واقع عمل دوتایی باشد، کافی است بسته بودن آن مجموعه را نسبت به آن چک کنیم)؟

ب) آیا می‌توانید دو زیر مجموعه‌ی سره از مجموعه‌ی اعداد صحیح بیابید که عناصر اولی را در هر یک از عناصر مجموعه‌ی دوم ضرب می‌کنیم، دوباره عنصری از مجموعه‌ی دوم بدست آید؟ یک تابع برای انجام این عملیات بنویسید.

(۲۹) بررسی کنید که آیا رابطه‌ی زیر یک تابع روی مجموعه‌ی اعداد حقیقی می‌باشد یا خیر. مقادیر $f(2)$ و $f(\frac{1}{4})$ و $f(-\frac{1}{2})$ و همچنین $f^{-1}(1)$ را بیابید.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3x^2 & x \geq 1 \\ \cos \pi x & 0 \leq x \leq 1 \\ 4x^2 - 2x + 1 & x \leq 0 \end{cases}$$

(۳۰) تابع بودن، یک به یک بودن و پوشایی هر یک از روابط زیر را بررسی کنید.

الف)

$$f: (0,1) \rightarrow (-1,1) \\ x \mapsto 2x - 1$$

ب)

$$g: (-1,1) \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

پ)

$$h: Q \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \frac{x}{y} \mapsto (x,y)$$

که در آن $Q = \{\frac{x}{y} \mid x, y \in \mathbb{N}, (x,y) = 1\}$ م.م.ب.، $x, y \in \mathbb{N}$

ت)

$$k: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ (x,y) \mapsto 2^x 3^y$$

(ث)

$$l: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$$

$$(x, y) \mapsto 2^{x-1}(2y - 1)$$

(۳۱) آیا می‌توانید تابعی دوسویی از $(0,1)$ به $\mathbb{R}$ بیابید؟ (به قسمت‌های (الف) و (ب) در سؤال ۲۹ توجه کنید)

(۳۲) فرض کنید یک خانواده‌ی دل‌خواه از مجموعه‌ها داشته باشیم و رابطه زیرمجموعه بودن (شمول) را بین آن‌ها در نظر بگیریم. اگر منظور از قابل مقایسه بودن دو تا از این مجموعه‌ها این باشد که یکی از آن‌ها زیرمجموعه دیگری است، درستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید. برای هریک که به نظرتان نادرست است مثال نقض بزنید و اگر که درست است تلاش کنید آن‌را ثابت کنید.

(الف) اگر هر دو تا از مجموعه‌های این خانواده با هم قابل مقایسه باشند، آن‌گاه در بین این مجموعه‌ها یکی هست که شامل همه باشد و یکی هم که مشمول در هم باشد وجود دارد (یعنی این خانواده نسبت به رابطه شمول ماکزیمم و مینیمم دارد).

(ب) اگر هر یک از مجموعه‌های این خانواده با یک یا چند تا از دیگر مجموعه‌ها (نه لزوماً با همه‌ی آن‌ها) قابل مقایسه باشد، آن‌گاه در بین این آن‌ها یکی هست که شامل همه باشد و یکی هم که مشمول در هم باشد وجود دارد.

(ث) در یک چنین خانواده از مجموعه‌ها همواره مجموعه‌هایی موجودند که از هر مجموعه‌ی دیگری که بتوان با آن‌ها مقایسه‌اش کرد کوچکتر باشند (و نیز به‌طور مشابه همواره مجموعه‌هایی موجودند که از هر مجموعه‌ی دیگری که بتوان با آن‌ها مقایسه‌اش کرد بزرگتر باشند).

(۳۳) فرض کنید وزن ۱۰۰ نفر را در یک جدول 10×10 با ترتیب دل‌خواه قرار داده ایم (در هر خانه نام فرد به همراه عدد وزن او). در هر سطر این جدول سنگین‌ترین افراد را مشخص می‌کنیم و در بین آن‌ها به دنبال سبک‌ترین فرد می‌گردیم (یعنی سبک‌ترین سنگین وزنان)! همچنین در هر ستون این جدول سبک‌وزن‌ترین افراد را مشخص می‌کنیم و در بین آن‌ها به دنبال سنگین‌ترین فرد می‌گردیم (یعنی سنگین‌ترین سبک وزنان)! بررسی کنید آیا وزن این دو نفر لزوماً یکی است؟ خودشان چطور! آیا ممکن است هر دو، یک نفر باشند؟ اگر پاسخ شما مثبت است دست کم یک مثال بزنید. اگر هم پاسخ شما به این هر یک از سوالات منفی است، برای آن مثال نقض بزنید و بررسی کنید چه ارتباط اندازه‌ای مشخصی بین وزن این دو نفر ممکن است وجود داشته باشد؟